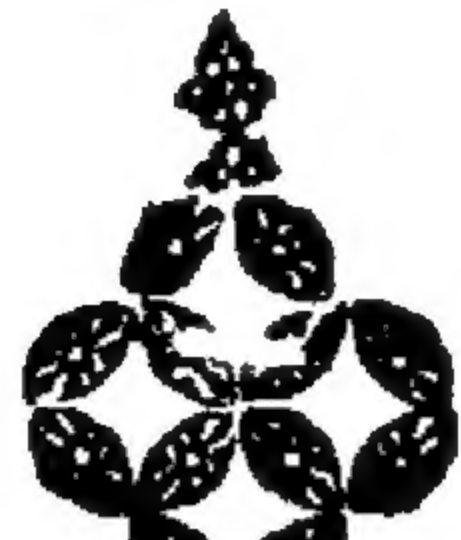


UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191058

UNIVERSAL
LIBRARY

هذا كتاب الضمة العزبة
في تهذيب الأصول
الهندية



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله مبدع المخلوقات العالم بما كان وما هو كان وما هو آت مخترع
الاشياء في غاية الاتقان ومبرزها من خفاء العدم الى ظهور العيان جعلها
في غاية الاحكام فبهرت العقول بما فيها من بديع الانتظام ان في ذلك
لايات لاولى الالباب وارشاد عن ليل الخطاء الى نهار الصواب والصلاة
والسلام على قطب دوائر الوجود ومطلع شمس التقى والجلود مستط
نقطة قلم الالهيات ومنبع الحكم والرياضيات محمد المبعوث باشكال
الفضائل المؤيد باقوى البراهين والدلائل وعلى آله اولى القوة واليقين
المنزهين عن كل عرض يشين ثم الدعاء لحضرة صاحب الخزم والرأى
السديد مولى الديار المصرية الصدر السعيد مركز دائرة الملك اوحد من
تقلب على منون الجياد والملك القائم على منشور بسطة العدل في تلك
الديار التي بلغت بهمة الغاية القصوى في الفضل أيد الله احكامه وثبت
على صراط الصدارة اقدامه وبعد فيقول الفقير الى رحمة المعبود المبدى

علي عزت أفندي لما امرني من اجابه السعد بليك ناظر المدارس الثلاث
 على مبارك بك ان اخلص كتابا في أصول الهندسة تكون عباراته على
 السهولة مؤسسه ويكون مذهب المعاني جيد التركيب والمباني يتتبع
 به القاصي والداني ويكون واسطة في جعل تعليم الهندسة العادية
 جارية على ترتيبه بالمهندسخانة الخديوية قابلت أمر حضرة بالامتثال
 واحتفلت به كل الاحتفال واعتنيت بجمع هذا الكتاب ليكون عدة
 لذوى الالباب واتخبطه من كتب شتى منها كتاب اقليدس الشهير
 وكتاب لا قوروا صاحب الفهم الغزير وكتاب الشهير فراتكور وكتاب
 المهندس ونسن صاحب الفهم المأثور وكتاب الشهير ليونتي اشهر مؤلف
 ومنشى وكتاب الشهير بلانشي وغير ذلك من المؤلفات الفرنسية
 المفيدة ذوات العقود الفريدة وكان عمدي في هذا التأليف كتاب جديد
 في أصول الهندسة جامع لما شيد مبانيه كل مهندس من القدماء وأسس
 وقد اهتم بتأليف هذا الكتاب الاخير المهندس لثاندرال فرناوى الشهير
 فيلسوف زمانه وفريد نظرائه واقرائه وذلك لما اشتمل عليه من كثرة
 المعاني وقلة الالفاظ والمباني مع ما اختص به من حسن الترتيب
 وسهولة الاسلوب الغريب ولذلك طبع بمدينة باريس أربعة عشر مرة
 بزيادة التحسين والتذهيب في كل مرة وكانت الطبعة الرابعة عشر منه
 في سنة ١٨٤٥ مسيحية الموافقة لسنة ١٢٦١ هجرية فاخذت منه ومن كل كتاب
 ما حسن وطاب وحذفت ما لا حاجة اليه ولا معمول فيما نحن بصدده عليه
 ورتبته ترتيبا يسر الخاطر ويروق الناظر وغبرت في هذا الكتاب النافع
 للمقيم والمسافر محبت الخطوط المتوازية ومبحث تماس محيطات الدوائر
 واجتهدت في تسهيل براهينه على قدر الامكان وامعنت النظر فيه كل
 الامعان واضفت للمقالة الثالثة دعاوى نظرية ضرورية في العلوم النظرية
 والعملية وفي تطبيق العلوم الرياضية على العلوم الطبيعية لاسيما في الخواص

الهندسية لاد شعة الضوئية واضفت الى عمليات هذه المقالة لتكميل المعنى
 دعاوى عملية أخرى عنها لا يستغنى واضفت الى ذلك ما جاد به فكري من
 الامثلة المفيدة ذوات المناقع العديدة وشرحتها عقب الدعاوى العملية
 المتعلقة بالمقالة الثالثة من الاصول الهندسية حتى يتوصل بها الى فهم
 ما يرام في هذا الفرض البعيد المرام وجعلت للمقالة الرابعة التي هي
 اهذه المقالة الثالثة تابعة تطبيقات مفيدة مبنية على فرائد جديدة بعضها
 مشروحة في الدعاوى المشهورة وبعضها مشروح عقب المقالة الرابعة
 المذكورة وجعلت كلما ينسب الى كل مقالة من الاشكال منفردا عن
 عداه دفعا لالتباس والاشكال واجتهدت في تحرير الفاظه ومبانيه
 وتهذيب عباراته ومعانيه وكنت اعرض كلما ترجمته أو ألفتة وجعته
 وحررته على حضرة الشيخ ابراهيم الدسوقي صاحب الفهم الثاقب والاجتهاد
 الحقيقي نجاء بحمد الله وافيًا بالمراد شافيًا غلة الصاد شاهدًا لا يام ولي النعم
 صاحب الدولة والهم بانهم انعموا في جباه العصور خلد الله ملكه الى البعث
 والنشور ولما تهيا للتمام وابس وشاح الختام وسعه مصححه بالنخبة العزية
 في تهذيب الاصول الهندسية والله الموفق للصواب واليه المرجع
 والمنتهى

(في الاصول الهندسية)

المقالة الاولى في خواص الخطوط المستقيمة وتساوي المثلثات وخواص
الشكل الرباعي

(حدود)

(حد ١) الجسم ماله أبعاد ثلاثة هي الطول والعرض والعمق أي الشكل

(حد ٢) الحيز هو الفراغ الذي يشغله الجسم

(حد ٣) سطح الجسم هو الحد الفارق بينه وبين المحيط به الملاصق وبعبارة
اخرى ماله طول وعرض فقط

(حد ٤) الخط ملتحق سطحين وبعبارة اخرى هو طول فقط

(حد ٥) النقطة ملتحق خطين

(حد ٦) كل من الجسم والسطح والخط يعتبر مجزأ عن المادة

(حد ٧) يطلق اسم الشكل على الجسم وعلى السطح وعلى الخط

(حد ٨) موضوع الهندسة الاشكال من حيث مساحة امتدادها
ومعرفة خواصها

(حد ٩) الخط المستقيم اقرب بعدد بين نقطتين مثاله الخط $a - b$ من
(الشكل ١)

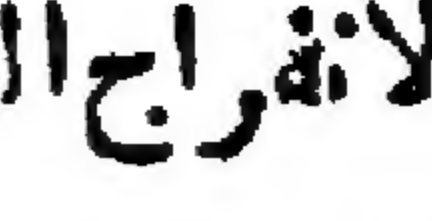
(حد ١٠) الخط المنكسر خط مركب من خطوط مستقيمة ليست على
استقامة واحدة مثاله الخط $a - b - c - d$ من (الشكل ١)

(حد ١١) الخط المخفي مالم يس مستقيماً ولا منكسراً مثاله الخط $a - b - c$
من (الشكل ١)

(حد ١٢) المستوى كل سطح امكن تطبيق المستقيم عليه في سائر جهاته
وبعبارة اخرى هو سطح اذا اخذ فيه نقطتان بالاختيار ووصل بينهما بمستقيم
انطبق هذا المستقيم عليه انطباقاً تاماً

(حد ١٣) السطح المخفي مالم يس مستوياً ولا مركباً من سطوح مستوية

(حد ١٤) الزاوية مسافة واقعة بين مستقيمين متقاطعين وبعبارة

اخرى هي الانفرج  كائِنْ بين مستقيمين متقاطعين ونقطة التقاطع تسمى رأس الزاوية والمستقيمان يسميان ضلعاها مثالها الزاوية $\angle A$ المرسومة في (الشكل ٢) فالنقطة A تسمى رأس الزاوية وكل من المستقيمين AB و AC يسمى ضلعاها والزاوية تميزتارة بحرف الرأس وتارة بثلاثة حروف بشرط أن يذكّر حرف الرأس في الوسط فان كانت مفردة كفي تمييزها حرف الرأس وان كانت مركبة من زاويتين فاصفها بـ $\angle ABC$ وتارة بالحروف الثلاثة

والزاويتان المتساويتان زاويتان اذا وضعت احدهما على الاخرى انطبقت عليهما انطباقا كاملا

اذا احتوت زاوية مثل $\angle A$ على زاويتين كلتاهما مساوية لزاوية اخرى كالزاوية $\angle D$ يقال ان الزاوية $\angle A$ ضعف الزاوية $\angle D$ فاذا احتوت على ثلاث زوايا كذلك يقال ان الزاوية $\angle A$ ثلاثة امثال الزاوية $\angle D$ وهكذا فالزاويا قابلة للمقارنة ببعضها كبقية المقادير

(حد ١٥) الزاوية القائمة هي احدى الزاويتين المتجاورتين المتساويتين الحادتين من تلافى مستقيم باخر مثالها الزاوية $\angle A$ و $\angle A'$ كافي (الشكل ٣)

والزاوية المنفرجة هي ما كانت اكبر من الزاوية القائمة مثالها الزاوية $\angle D$ من (الشكل ٤)

والزاوية الحادة هي ما كانت اصغر من الزاوية القائمة مثالها الزاوية $\angle A$ من (الشكل ٤)

(حد ١٦) المستقيم العمود على مستقيم هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين مثالها المستقيم AB من (الشكل ٣)

(حد ١٧) المستقيم المائل على مستقيم هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين غير متساويتين مثالها المستقيم CD من (الشكل ١٧)

(حد ١٨) الزاويتان المتمتان لبعضهما هما زاويتان مجموعهما يساوي

زاويتين قائمتين

(حد ١٩) الزاويتان التاميتان هما زاويتان مجموعهما يساوي زاوية قائمة

(حد ٢٠) الخطان المتوازيان خطان مستقيمان في مستو واحد اذا امتدا

لا يلتقيان أصلا مثال ذلك $a - b$ و $c - d$ من (الشكل ٥)

(حد ٢١) الشكل المستوي سطح مستو محدّد من جميع جهاته بخطوط

لكن اذا كانت تلك الخطوط مستقيمة فالمسافة المحددة بتلك الخطوط تسمى شكلا

مستقيم الخطوط او مستقيم الاضلاع او مضاعفا مستويا فجملة الخطوط

المذكورة تكون محيط الشكل أو أطرافه كما في (الشكل ٦)

(حد ٢٢) أبسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ماله ثلاثة اضلاع ويسمى

مثلاثا وماله اربعة اضلاع يسمى ذا اربعة اضلاع أو شكلا رباعيا وماله خمسة

اضلاع يسمى مخمساً أو شكلا خماسيا وماله ستة يسمى مستسا أو شكلا

سداسيا وهكذا

(حد ٢٣) المثلث المتساوي الاضلاع ما كانت اضلاعه متساوية كما في

(الشكل ٧)

والمثلث المتساوي الساقين ما كان فيه ضلعان متساويان فقط كما في

(الشكل ٨)

والمثلث المختلف الاضلاع ما كانت اضلاعه مختلفة كما في (شكل ٩)

(حد ٢٤) المثلث القائم الزاوية ما كانت احدى زواياه قائمة والضلع

المقابل لها يسمى وترها فالمثلث $a - b$ القائم الزاوية a يسمى مثلثا قائم

الزاوية والضلع a يسمى وتر القائمة كما في (الشكل ١٠)

(حد ٢٥) الشكل الرباعي انواع وهي المتوازي الاضلاع والمعين

والمستطيل والمربع والمخرف وشبه المخرف أما المتوازي الاضلاع فهو

ما كانت اضلاعه المتقابلة متوازية سواء كانت اضلاعه المتجاورة متساوية

او غير متساوية وسواء كانت زواياه قائمة او غير قائمة كما في (الشكل ١٣)

وأما المعين فهو متوازي اضلاع اضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة كما في

(الشكل ١٤)

وأما المستطيل فهو متوازي اضلاع زواياه قائمة واضلاعه المتجاورة مختلفة
كافي (الشكل ١٢)

وأما المربع فهو متوازي اضلاع متساوية وزواياه قائمة كافي
(الشكل ١١)

وأما المنحرف فهو شكل رباعي أضلاعه المتقابلة غير متوازية
وأما شبه المنحرف فهو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط كافي
(الشكل ١٥)

(حد ٢٦) قطر الشكل خط مستقيم موصول بين رأسين زاويتين غير
متجاورتين من زواياه كالخط a من (الشكل ٤٢)

(حد ٢٧) كثير الاضلاع ان كانت اضلاعه متساوية يسمى متساوي
الاضلاع وان كانت زواياه متساوية يسمى متساوي الزوايا

(حد ٢٨) الشكلان المتساوي الاضلاع شكلان اضلاعهما المتناظرة
متساوية وموضوعة على نظم واحد أي أنهما اذا تتبعنا محيطيهما في جهة
واحدة شاهدنا الضلع الاول من احدهما مساويا للاول من الآخر
والثاني من الاول مساويا للثاني من الآخر والثالث للثالث وهكذا

والشكلان المتساوي الزوايا شكلان زواياهما المتناظرة متساوية وموضوعة
على ترتيب واحد أي أن الزاوية الاولى من احدهما مساوية للاولى من
الآخر والثانية من الاول مساوية للثانية من الآخر والثالثة للثالثة وهكذا
والاضلاع المتساوية تسمى بالاضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية تسمى بالزوايا
المتناظرة

(حد ٢٩) كثير الاضلاع المحذب شكل موضوع بتمامه في جهة واحدة
من اتجاه أي ضلع من اضلاعه

ومحيط أي مضلع محذب لا يمكن أن يقطعه أي مستقيم في أكثر من نقطتين

* (تنبيه) *

المقالات الاربع الاول يبحث فيها عن الاشكال المستوية وعن الخطوط
المرسومة على السطح المستوي

* (بيان الاصطلاحات والعلامات المشتملة عليها هذه الاصول) *

ضروريات العلم قضاياه البينة بنفسها أى التى لا تحتاج الى برهان
الدعوى النظرية هى القضية التى لا تتضح حقيقتها الا بواسطة البرهان
العقلى

الدعوى العملية هى المسئلة التى يراد حلها بالعمل
الفائدة هى القضية المعينة على اثبات دعوى نظرية او مسئلة
القضية اسم يطلق على الدعوى النظرية والعملية والفائدة
النتيجة هى الثمرة التى تظهر من قضية او جملة قضايات تقدمت
التنبية ما يفهم منه فائدة الدعوى التى تقدمت وارتباطها بغايتها
الفروض هى الموضوعات التى تدرج فى تقرير قضية او فى اثبات برهان

* (العلامات) *

هذه العلامة = تسمى علامة التساوى فكتابة $a = b$ معناها ا
تساوى ب

ولبيان أن مقدار ا اصغر من مقدار ب يكتب $a < b$

ولبيان ان ا اكبر من ب يكتب $a > b$

وهذه العلامة + هى علامة الزيادة وتدل على الجمع وهذه العلامة -

هى علامة النقصان وتدل على الطرح فكتابة $a + b$ تدل على حاصل

جمع كيتى ا و ب وكتابة $a - b$ تدل على فرقهما اى على الباقي

من طرح الكمية ب من الكمية ا وكتابة $a \div b$ تدل على حاصل

أو $a \times b$ تدل على انه ينبغى جمع ا و ب وطرح ب

من حاصل جمعهما

وهذه العلامة \times تدل على الضرب فكتابة $a \times b$ تدل على الحاصل

من ضرب ا في - وقد تستعمل نقطة بدل علامة الضرب هذه \times
 فكتابة \times - ككتابة + - وقد يكتب الحاصل المذكور أيضا
 بدون علامة متوسطة بين المضروب والمضروب فيه هكذا ا -
 وكتابة \times (- + -) تدل على حاصل ضرب ا في كمية -
 + - + - واذا اريد بيان حاصل ضرب ا في - في ا - -
 + - يكتب هكذا
 (+ -) (- + -) فكلما حصر بين قوسين يعتبر كمية
 واحدة فقط

ا بيان ان الخط ا - مكرر ثلاث مرات يكتب ٣ ا - وبيان اخذ نصف
 زاوية - يكتب $\frac{1}{2}$ - ويستدل على مربع الخط ا - بهذه العلامة
 $\frac{2}{3}$ - وعلى مكعبه بهذه ا - وسيتضح مربع الخط ومكعبه في محله
 هذه العلامة $\sqrt{\quad}$ تدل على استخراج الجذر فكتابة $\sqrt{9}$ تدل على ان
 المطلوب جذر المربع ٩ وهو ٣ وكتابة $\sqrt{-x}$ تدل على ان
 المطلوب جذر حاصل ضرب - x اى على الوسط المناسب الهندسى
 بين - و +

* (ضروريات العلم) *

- (١) المقداران المساويان لمقدار واحد متساويان
- (٢) الكل اعظم من جزئه
- (٣) الكل يساوى مجموع اجزائه
- (٤) لا يمكن وصل خطين مستقيمين بين نقطتين
- (٥) الشئان يكونان متساويين اذا امكن انطباق احدهما على الآخر
 انطباقا تاما سواء كان هذان الشئان خطين او سطحيين او جسمين
- (٦) الاشياء المتساوية اذا اضيف اليها اشياء متساوية كانت الحواصل
 متساوية

(٧) الاشياء المتساوية اذا طرح منها اشياء متساوية كانت البواقي متساوية

(٨) الاشياء المتساوية اذا ضربت في اشياء متساوية كانت الحواصل متساوية

(٩) الاشياء المتساوية اذا قسمت على اشياء متساوية كانت النواتج متساوية

(١٠) الاشياء المختلفة اذا اضيف اليها اشياء متساوية كانت الحواصل غير متساوية

(١١) الاشياء المختلفة اذا طرح منها اشياء متساوية كانت البواقي غير متساوية

(١٢) الاشياء المختلفة اذا ضربت في اشياء متساوية كانت الحواصل مختلفة

(١٣) الاشياء المختلفة اذا قسمت على اشياء متساوية كانت النواتج غير متساوية

(١٤) الاشياء المختلفة اذا اضيف اليها اشياء مختلفة الا الصغرى لا الصغرى والا كبرى لا كبرى كانت الحواصل مختلفة اى يكون مجموع الاشياء الصغرى اصغر من مجموع الاشياء الكبرى

(١٥) اذا وجد خط ومستقيم غير محدود في مستوا واحد وكانت نهايتا الخط في جهتين مختلفتين من هذا المستقيم قطعه بالاقل في نقطة واحدة

(الدعوى الاولى النظرية شكل ح)

كل مستقيمين اشتركا في نقطتين يتحدان ويصيران مستقيما واحدا اى اذا اشتركا مستقيمان في نقطتين مثل ا و ب فانهما يصيران مستقيما واحدا

وبرهانه ان يقال حيث لا يمكن وصل مستقيمين بين النقطتين ا و ب يتحد الخطان من النقطة ا الى النقطة ب فان قيل انهما قد لا يصيران

على المستقيم $ا -$ فاذا لا يمكن أن يقام من نقطة واحدة من مستقيم
عمودان عليه في جهة واحدة منه

وينتج من هذه الدعوى أن الزوايا القائمة متساوية

فاذا كان المستقيم $ح د$ عمودا على المستقيم $ا -$ والمستقيم $ع ط$
عمودا على المستقيم $هـ و$ تكون القائمة $ا ح د$ مساوية للقائمة الاخرى
 $هـ ع ط$

(برهانه) أن يؤخذ بعد $ا ح = هـ ع$ و $ح د = ع و$ ثم توضع
الزاوية $هـ ع ط$ على الزاوية $ا ح د$ بان يطبق الضلع $هـ ع$ على الضلع
 $ا ح$ فتقع النقطة $هـ$ على النقطة $ا$ والنقطة $ع$ على النقطة $ح$
ويقع العمود $ع ط$ على العمود $ح د$ لانه لا يمكن إقامة عمودين على
مستقيم من نقطة واحدة في جهة واحدة منه فحينئذ تنطبق الزاوية $هـ ع ط$
على الزاوية $ا ح د$ وتساويها فقد ثبت بهذا أن الزوايا القائمة متساوية

* (تنبيه) *

ليس المقصود من هذه النتيجة اثبات أن الزاوية $ا ح د$ تساوي الزاوية المجاورة
لها $د ح -$ ولا أن الزاوية $هـ ع ط$ تساوي الزاوية $ط ح و$ المجاورة
لها لان الزاوية $ا ح د = د ح -$ بمقتضى تعريف الزاوية القائمة ولان
الزاوية $هـ ع ط = ط ح و$ بمقتضى التعريف المذكور
بل المقصود اثبات أن اى زاوية قائمة من شكل تساوي القائمة من آخر

* (الدعوى الثالثة النظرية شكل ١٧) *

مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادتين من تلاقى مستقيم بآخر يساوى
زاويتين قائمتين

فاذا تلاقى مستقيم مثل $ح د$ بمستقيم آخر مثل $ا -$ فمجموع الزاويتين
 $ا ح د$ و $د ح -$ يساوى قائمتين اعنى ان $ا ح د + د ح - = قائمتين$
(برهانه) ان يقام من النقطة $ح$ عمود $ح هـ$ على $ا -$ فيصير مجموع
الزاويتين $د ح ا$ و $د ح -$ مركبا من ثلاث زوايا هي

هـ ح ا و هـ ح د و د ح - ليكن الاولى هـ ح ا قائمة ومجموع
الزاويتين هـ ح د و د ح - يساوى القائمة هـ ح - فحينئذ يكون
مجموع الزاويتين د ح ا و د ح - مساويا لقائمتين
وينتج من هذه النظرية

اولا انه اذا كانت احدى الزاويتين المتجاورتين الحادتين من تلافى
مستقيم باخر قائمة تكون الاخرى كذلك واذا كانت احدهما حادة تكون
الاخرى منفرجة

وثانيا ان مجموع الزوايا المتوالية مثل ا ح د و د ح هـ و هـ ح ف
و ف ح - الخ المرسومة فى جهة واحدة من مستقيم واحد مثل ا -
يساوى قائمتين لان مجموع الزوايا المذكورة يساوى مجموع الزاويتين
المتجاورتين د ح ا و د ح -

وثالثا ان مجموع الزوايا المتوالية ا و - و - و ح و د الخ المرسومة
حول نقطة و بخطوط مستقيمة متلاقية فى النقطة المذكورة يساوى اربع
قوائم كفاي (شكل ٢٢)

لانه اذا امتد من النقطة و مستقيم مثل ف ع يصير مجموع الزوايا
المذكورة مركبا من مجموع الزوايا المتوالية ا و ف و ا و - و - و ع
المرسومة فى جهة واحدة من المستقيم ف ع ومن مجموع الزوايا المتوالية
ح و ع و ح و د و د و هـ و هـ و ف المرسومة فى الجهة الاخرى
من المستقيم المذكور

(الدعوى الرابعة النظرية شكل ٢٠)

اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين مساويا لقائمتين كان الضلع الخارج من
احدهما على استقامة الضلع الخارج من الاخرى

اى اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ح د و د ح - من الشكل
المرفوم مساويا لقائمتين كان الضلع ح ا على استقامة الضلع د - لانه
لو لم يكن الضلع ح ا على استقامة الضلع ح - لكان على استقامة ح ك

مثلا فيكون $a \perp d$ و $d \perp c$ = قائمتين
 والمفروض أن $a \perp d$ و $d \perp c$ = قائمتين فيلزم أن يكون $a \perp c$
 $d \perp c$ = $d \perp c$ و $a \perp d$ و $d \perp c$ وبطرح الزاوية المشتركة $d \perp c$ تبقى
 الزاوية $d \perp c$ = $d \perp c$ وهو محال لان الزاوية $d \perp c$ جزء من الزاوية
 $d \perp c$ والجزء لا يساوي الكل فتبين بهذا أن الضلع a على استقامة
 d وينتج من هذه النظرية

أولا أن العمودين الخارجين من نقطة واحدة على مستقيم واحد يكونان على
 استقامة واحدة كما في (شكل ١٨)

اى اذا اقيم عمودان d و d من نقطة o على مستقيم a -
 يكون العمود d و d على استقامة d
 لان مجموع الزاويتين a و a و d المتجاورتين مساو لقائمتين فيكون
 d و d على استقامة d

وثانيا أن احد المستقيمين اذا كان عمودا على الآخر كان الآخر عمودا عليه
 اى اذا كان المستقيم d من الشكل المرقوم عمودا على المستقيم a -
 كان المستقيم a - عمودا ايضا على المستقيم d
 لانه يلزم من كون المستقيم d عمودا على a - أن تكون الزاوية
 ٢ و d قائمة وأن تكون مجاورتها a و d كذلك ويلزم من هذا أن يكون
 المستقيم a - عمودا على المستقيم d

* (الدعوى الخامسة النظرية شكل ٢١) *

اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان برأسيهما متساويتان
 متساويتين

اى اذا تقاطع مستقيمان مثل a - و d من الشكل المرقوم فالزاويتان
 h و h - تكونان متساويتين اى يكون $a \perp h$ = $d \perp h$
 لانه يلزم من كون الخط a - مستقيما أن يكون
 $a \perp h$ و $d \perp h$ = قائمتين ومن كون الخط d - مستقيما أن يكون

هـ - + - هـ د = فائتين فيكون
 ا هـ + هـ - = هـ - + - هـ د و بطرح الزاوية المشتركة
 هـ - تبقى الزاوية ا هـ هـ مساوية للزاوية - هـ د وهو المطلوب اثباته
 وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ا هـ د مساوية للزاوية هـ - هـ .

* (تنبيه) *

إذا كان للزاويتين المتساويتين المتقابلتين برأسيهما ضلعان على خط مستقيم
 واحد وكانت احدهما في جهة منه مضادة لجهة الاخرى كان الضلعان
 الاخران كذلك

اى اذا كان الضلعان هـ و هـ د على استقامة واحدة وكانت الزاوية
 هـ ا هـ مساوية للزاوية د هـ - ومضادة لهما في الاتجاه يكون الضلع هـ -
 على استقامة الضلع هـ ا

(برهانه) أن يقال يلزم من كون المستقيم ا هـ ملاقيا للمستقيم هـ د أن يكون
 مجموع المتجاورتين هـ ا و ا هـ د مساويا للتائمتين وحيث ان الزاوية
 د هـ - مساوية للزاوية هـ ا هـ فرضا يكون مجموع المتجاورتين ا هـ د
 و د هـ - مساويا للتائمتين ويلزم من هذا أن يكون الضلع هـ - على
 استقامة الضلع هـ ا (كما تقدم في النظرية الرابعة)

* (الدعوى السادسة النظرية شكل ٢٣) *

المثلثان يكونان متساويين اذا كان في كل منهما زاوية مساوية لنظيرتها من
 الاخر ومحصرة بين ضلعين كل منهما مساوي لنظيره من الاخر
 اى اذا كانت الزاوية ا = للزاوية د والضلع ا - = للضلع د هـ
 والضلع ا هـ = للضلع د و يكون المثلث ا - هـ = للمثلث
 د هـ و

(برهانه) أنه لو وضع المثلث ا - هـ على المثلث د هـ و بحيث ينطبق الضلع
 ا - على مساويه د هـ لوقعت النقطة ا على النقطة د والنقطة -
 على النقطة هـ وحيث ان الزاوية ا = للزاوية د يقع الضلع ا هـ

على

على مساوية د و والنقطة ح على النقطة و فينطبق الضلع س ح
على الضلع ه و فيثبت تطبيق المثلث ا س ح على المثلث د ه و
فيكونان متساويين وهذا هو المطلوب

و ينتج من هذه النظرية انه اذا تساوى ضلعان وزاوية بينهما من مثلث ضلعين
وزاوية بينهما من مثلث آخر كل لنظيره تساوت بقية اجزاء احدهما بقية
اجزاء الاخر

اي اذا كان الضلع ا س = للضلع د ه والضلع ا ح = للضلع
د و والزاوية ا = للزاوية د تكون الزاوية س = للزاوية ه
والزاوية ح = للزاوية و والضلع س ح = للضلع ه و

(الدعوى السابعة النظرية شكل ٢٣)

يتساوى المثلثان اذا تساوى من كل منهما ضلع والزاويتان المجاورتان له
كل نظيره

اي اذا كان الضلع س ح مساويا للضلع ه و والزاوية س مساوية
للزاوية ه والزاوية ح مساوية للزاوية د يكون المثلث ا س ح
مساويا للمثلث د ه و

(برهانه) انه لو وضع المثلث ا س ح على المثلث د ه و بحيث ينطبق
الضلع س ح على مساويه ه و لوقعت النقطة س على النقطة ه
والنقطة ح على النقطة و وحيث ان الزاوية س = للزاوية ه يقع
الضلع ا س على الضلع د ه وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط د ه
وحيث ان الزاوية ح = للزاوية د يقع الضلع ا ح على الضلع د و
وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط د و فيثبت تقع النقطة ا على
النقطة د وهذا ينطبق المثلث ا س ح على المثلث د ه و ويساويه
وهذا هو المطلوب

نتيجة اذا تساوى ضلع وزاويتان مجاورتان له من مثلث ضلعا وزاويتين
مجاورتين له من مثلث آخر كل لنظيره تساوت بقية اجزاء احدهما بقية اجزاء

الاخر كل بنظيره اي اذا كان الضلع γ مساويا للضلع $هـ$ و الزاوية β مساوية للزاوية $هـ$ والزاوية α مساوية للزاوية $د$ والضلع α مساويا للضلع $د$ والضلع α مساويا للضلع $د$ والضلع α مساويا للضلع $د$.

(الدعوى الثامنة النظرية شكل ٢٣)

اي ضلع من اي مثلث اصغر من مجموع الضلعين الاخرين واكبر من فاضلهما
اي ان الضلع α من المثلث α اصغر من مجموع الضلعين α و γ واكبر من فاضلهما

(برهان القضية الاولى) ان الخط المستقيم α اصغر من الخط المنكسر
 α المار بنهايتي المستقيم α و β .
(وبرهان الثانية) ان الضلع γ $\gamma > \alpha + \beta$ فاذا طرح α من
كل من الطرفين بقي $\gamma - \alpha > \beta$ اي $\beta < \gamma - \alpha$ وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة النظرية شكل ٢٤)

اذا اخذت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايتي احدا ضلعه مستقيمان
فمجموع المستقيمين المذكورين يكون اصغر من مجموع الضلعين الباقيين من
المثلث اي اذا اخذت نقطة مثل $هـ$ داخل مثلث مثل α و β و γ وملتصتا
الى نهايتي الضلع γ مستقيمان $هـ$ و $هـ$ كان مجموع الخطين
 γ و $هـ$ اصغر من مجموع الضلعين α و β .
(برهانه) ان يقال لو امتد احد المستقيمين $هـ$ على استقامته جهة $هـ$
حتى قطع الضلع α في نقطة مثل $د$ لحدث مثلث α فيه الضلع
 $\gamma > \alpha + \beta$ اي $\gamma > \alpha + \beta$ و $\gamma > \alpha + \beta$ وحدث
ايضا مثلث $هـ$ فيه الضلع $\gamma > \alpha + \beta$ و $\gamma > \alpha + \beta$ فلو كانت هذه
الاشياء غير المتساوية الاصغر للاصغر والا كبر للاكبر لنحصل
 $\gamma > \alpha + \beta + \gamma$ فاذا

طرح الجزء المشترك هـ د من كل من الطرفين بقي

ـ هـ + هـ د > د + ا + ا ـ د + د فاذا وضع ا د عوضا
عن ا د + د د حدث

ـ هـ د + هـ د > د + ا + ا وهو المطلوب

* (الدعوى العاشرة النظرية شكل ٢٥) *

اذا تساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكانت الزاوية التي
بين ضلعي المثلث الاول اكبر من الزاوية التي بين ضلعي المثلث الثاني يكون
الضلع الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني

اي اذا كان الضلع ا ـ من المثلث ا ـ د مساويا للضلع د هـ من
المثلث د هـ و والضلع ا د مساويا للضلع د و والزاوية ـ ا د اكبر
من الزاوية د يكون الضلع ـ د اكبر من الضلع هـ و

(برهانه) ان ترسم زاوية مثل د ا ع = الزاوية د و يؤخذ ا ع = د هـ

ويوصل د ع فيحدث مثلث ا د ع = للمثلث د هـ و لان الضلع

ا د = د و فرضا الزاوية د ا ع = الزاوية د فعملا والضلع ا ع

= د هـ كذلك (كفاي النظرية السادسة) فينتج من تساوى المثلثين ان

الضلع د ع = هـ و فاذا انصفت الزاوية ـ ا ع بمستقيم ا سـ

لا يتبع هذا المستقيم الا في الزاوية ـ ا د لانها اكبر من الزاوية د ا ع

فحينئذ اذا وصل سـ د يكون المثلث ا سـ د مساويا للمثلث ا ع د

لان الضلع ا ع = للضلع ا سـ د عملا والزاوية د ا سـ = للزاوية

ـ ا سـ د كذلك والضلع ا سـ مشترك (كفاي النظرية السادسة)

وينتج من تساوى هذين المثلثين ان الضلع ـ د = د ع

ومن المعلوم ان المثلث د ع سـ فيه الضلع د ع > د سـ + د سـ

فاذله ابدل الضلع د سـ بالضلع ـ د سـ كان د ع > د سـ + د سـ

لكن د سـ + د سـ = د سـ فيكون د ع > د سـ وحيث ان

د ع = هـ و يكون هـ و > د سـ أي د سـ < هـ و وهو

* (تنبیه) *

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث اخر وكان الضلع الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني تكون الزاوية التي بين ضلعي المثلث الاول اكبر من الزاوية التي بين ضلعي المثلث الثاني اى اذا كان الضلع a من المثلث a مساويا للضلع d من المثلث d هـ و والضلع a مساويا للضلع d وكان الضلع c اكبر من الضلع h و تكون الزاوية a اكبر من الزاوية h و (برهانه) ان يقال لو لم تكن الزاوية a اكبر من الزاوية h و لم كانت اما مساوية لهما او اصغر منهما فان كانت مساوية لهما لزم ان يكون الضلع c مساويا للضلع h وهذا مخالف للمفروض وان كانت اصغر منها لزم ان يكون الضلع c اصغر من الضلع h وهذا ايضا مخالف للمفروض فحينئذ تكون الزاوية a اكبر من الزاوية h و وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية عشر النظرية شكل ٢٣) *

اذا ساوت اضلاع مثلث اضلاع مثلث اخر كل لتطيره كان المثلثان متساويين اى اذا كان الضلع a من المثلث a = للضلع d من المثلث d هـ و والضلع a = للضلع d والضلع c = للضلع h و يكون المثلث a مساويا للمثلث d هـ و (برهانه) ان يقال يلزم من تساوى الاضلاع المتناظرة ان تتساوى الزوايا المتناظرة اى ان تكون الزاوية a = للزاوية d والزاوية c = للزاوية h والزاوية a = للزاوية d و اذ لو لم تكن الزاوية a مساوية للزاوية d لكانت اما اكبر منها او اصغر منها فان كانت الزاوية a اكبر من الزاوية d كان الضلع c اكبر من الضلع h وهذا مخالف للمفروض وان كانت الزاوية a اصغر من الزاوية d كان الضلع c اصغر من الضلع h وهذا ايضا مخالف للمفروض فتكون الزاوية a

مساوية

مساوية للزاوية د وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ب = للزاوية
 هـ وأن الزاوية ج = للزاوية و وحيث ان أجزاء المثلث ا ب ج
 مساوية لنظائرهما من المثلث د هـ و يكون المثلث ا ب ج مساويا للمثلث
 د هـ و وهذا هو المطلوب

* (تنبيه) *

قد ظهر من برهان هذه القضية أن الزوايا المتساوية تكون مقابلة للاضلاع
 المتساوية لان الراويتين المتساويتين ا و د مقابلتان للضلعين المتساويين
 ب ج و هـ و

* (الدعوى الثانية عشر النظرية شكل ٢٨) *

كل مثلث متساوي الساقين زاويا المقابلة لساقيه متساويتان
 أى اذا كان الساق ا ب مساويا للساق ا ج من المثلث ا ب ج تكون
 الزاوية ج مساوية للزاوية ب

(برهانه) أن ينصف الضلع ب ج بنقطة مثل د ويوصل المستقيم ا د
 فيكون المثلثان الحادثان ا ب د و ا ج د متساويين لان الضلع ا د
 مشترك والضلع ا ب = للضلع ا ج فرضا والضلع ب د = للضلع ج د
 د عملا (كفاي النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوى هذين المثلثين
 أن تكون الزاوية ج = للزاوية ب وهو المطلوب

* (تنبيه) *

اعلم أن أى ضلع من اضلاع المثلث غير المتساوى الساقين يصح أن يعتبر قاعدة
 ورأس الزاوية المقابلة له تسمى رأس المثلث وأما المثلث المتساوى الساقين
 فقاعدته ضلعه الثالث أى مادون الساقين

* (وينتج من هذه النظرية) *

أولا أن كل مثلث متساوى الاضلاع فهو متساوى الزوايا
 وثانيا أن المستقيم الواصل من رأس مثلث متساوى الساقين الى وسط
 قاعدته يكون عمودا عليها ومنه فالزاوية الرأس لانه يلزم من تساوى المثلثين

ا - د و ا د خ أن تكون الزاوية - ا د = للزاوية د ا د والزاوية
ا د - = للزاوية ا د د

(الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ٢٩)

اذا تساوى زاويتان من مثلث تساوى الضلعان المقابلان لهما
أى اذا كانت الزاوية ا - د = د ا - يكون الضلع ا د = ا -
(برهانه) أن يقال لو تصورنا مثلثا كالمثلث آ - د مساويا للمثلث
ا - د بحيث يكون الضلع آ - د = د - = د والزاوية آ - د = د -
والزاوية د = د ثم طبقنا المثلث آ - د على المثلث ا - د بحيث
تقع النقطة د على النقطة - والنقطة آ على النقطة د لكأن
الزاوية د = د = د وحينئذ يقع الضلع د آ على الضلع د ا
والضلع آ - د على د ا وتقع النقطة آ على النقطة ا فيكون آ - د
= ا د ويلزم من هذا أن يكون ا - د = ا د وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ٣٠)

أى مثلث احدى زاويتيها اكبر من الاخرى يكون ضلعه المقابل للكبرى اكبر
من ضلعه المقابل للصغرى وبالعكس أى أى مثلث احدى ضلعيه اكبر من
الآخر تكون زاويته المقابلة للضلع اكبر زاوية المقابلة للضلع
الصغير

(برهان القضية الاولى) أن يقال لتكن الزاوية د < د - فيكون الضلع
ا - المقابل للزاوية د اكبر من الضلع ا د المقابل للزاوية -
وابيانته تنشأ زاوية مثل د د مساوية للزاوية - فيكون المثلث
الحادث د د د متساوى الساقين أى يكون د د = د د وحينئذ
ان الخط المستقيم ا د اقصر من ا د + د و ا د + د د
= ا د + د - = ا - يكون ا - اكبر من ا د

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن الضلع $a - b < a$ فتكون الزاوية \angle المقابلة للضلع $a - b$ اكبر من الزاوية \angle المقابلة للضلع a

إذ لو لم تكن الزاوية \angle اكبر من الزاوية \angle لكانت اما اصغر منها او مساوية لها فان كانت اصغر منها لزم أن يكون $a - b > a$ وهذا مخالف للمفروض وان كانت مساوية لها لزم أن يكون $a - b = a$ وهذا أيضا مخالف للمفروض فاذن يلزم أن تكون الزاوية \angle اكبر من الزاوية \angle وهو المطلوب

• (الدعوى الخامسة عشر النظرية شكل به) •

النقطة الخارجة عن مستقيم لا يمكن أن ينزل منها على الاعمود واحد لاعمودان

(برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن \angle خطا مستقيما و \angle نقطة خارجة عنه فلواخذت نقطة منه مثل \angle ووصل المستقيم \angle وحدثت زاويتان متجاورتان \angle و \angle فان كانتا متساويتين كان المستقيم \angle عمودا على المستقيم \angle وان كانتا غير متساويتين بأن كانت الزاوية \angle اصغر من الزاوية \angle تنشأ زاوية مثل \angle و $\angle = \angle$ ثم يؤخذ الضلع \angle و $\angle = \angle$ ثم يوصل المستقيم \angle و فيكون عمودا على المستقيم \angle لان المثلث \angle $\angle = \angle$ للمثلث \angle و لان الضلع $\angle = \angle$ للضلع \angle وبالعمل والضلع \angle مشترك والزاوية \angle $\angle = \angle$ للزاوية \angle وبالعمل (كفاي النظرية السادسة) ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية \angle $\angle = \angle$ للزاوية \angle و وأن يكون المستقيم \angle عمودا على المستقيم \angle و فاذن يكون المستقيم \angle عمودا على المستقيم \angle

(وبرهان القضية الثانية) أن تفرض نقطة مثل \angle خارجة عن المستقيم $a - b$ وأن \angle وعمود عليه ثم يقال ان اى مستقيم مئذ من النقطة \angle الى

أى نقطة من نقط المستقيم $ا ب$ غير النقطة $د$ لا يكون عمودا عليه فان
 قبل يمكن تنزيل عمود آخر مثل $ح$ و منلاقنا اذا امتد $د$ على استقامته
 جهة $د$ ثم اخذ $ه د = د ح$ ثم وصل المستقيم $ه د$ و حدث مثلث
 $ه د و = د ه$ للمثلث $و د$ لان الضلع $و د$ مشترك والضلع $ه د = د و$
 للضلع $د ح$ بالعمل والزاوية $ه د و = د ح و$ للزاوية $و د ح$ لقيامهما ويلزم
 من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية $ه د و$ مساوية للزاوية $د و ح$
 وحيث ادعى أن $ح$ و عمود على $ا ب$ تكون الزاوية $د و ح$ قائمة فتكون
 الزاوية $ه د و$ كذلك ويلزم من هذا أن يكون مجموع المتجاورتين $د و ح$
 $و د ه$ مساويا للقائمتين وعليه يكون الخط $د ه$ مستقيما واحدا ما زا
 بالنقطتين $د و ه$ المار بهما المستقيم $ه د و$ ويلزم من هذا ان كان
 وصل مستقيمين بين نقطتين وهو محال فتبين بهذا أن مجموع المتجاورتين $د و ح$
 $و د ه$ لا يكون مساويا للقائمتين فحينئذ لا تكون الزاوية $د و ح$ قائمة
 بمعنى أن المستقيم $د و$ ليس عمودا على المستقيم $ا ب$ وهو المطلوب

• (الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ٣١) •

إذا اخذت نقطة خارج مستقيم وانزل منها عمود وموائيل فاعلم

أولا أن العمود اقصر من كل مائل

وثانيا أن المائلين ذوي البعدين المتساويين عن موقع العمود متساويان

وثالثا أن بعدى المائلين المتساويين عن موقع العمود متساويان

ورابعا أن المائلين ذوي البعدين غير المتساويين ابعدهما عن موقع العمود
 اطولهما.

وثامسا أن المائلين غير المتساويين اطولهما ابعدهما عن موقع العمود

أى إذا اخذت نقطة مثل $ا$ خارج خط مثل $د ه$ وأنزل منها عمود $ا ب$

وموائيل $ا ه و ا ح و ا د$ الخ فاعلم

أولا أن العمود $ا ب$ يكون اصغر من كل مائل

وثانيا أن الخططين $ا د و ا ه$ المائلين المتباعدين عن موقع العمود

يكونان

يكونان متساويين اذا كان البعدان ـ هـ هـ متساويين
وثالثا ان المائلين ـ وـ ا هـ اذا كانا متساويين فالبعدان ـ وـ هـ يكونان كذلك

ووايضا ان البعد ـ وـ هـ اذا كان اكبر من البعد ـ هـ هـ كان المائل ـ وـ ا هـ اطول من المائل ـ ا هـ

وخامسا ان المائل ـ وـ ا هـ اذا كان اطول من المائل ـ ا هـ كان البعد ـ وـ هـ اكبر من البعد ـ هـ هـ

(برهان القضية الاولى) أن يتد العمود ـ ا هـ على استقامة جهة ـ هـ هـ
ثم يؤخذ البعد ـ وـ هـ ـ وـ ا هـ ويوصل ـ وـ هـ فيحدث مثلث ـ وـ هـ هـ
للمثلث ـ وـ ا هـ لان الزاوية ـ وـ هـ هـ ـ وـ ا هـ هـ اقيامهما والضلع ـ وـ هـ
مشارك والضلع ـ وـ هـ للضلع ـ ا هـ بالعمل (كما في النظرية السادسة)
ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن يكون الضلع ـ وـ هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ
في المثلث ـ وـ ا هـ والضلع ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ
فاذن يكون ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث ان البعد ـ وـ هـ ـ وـ ا هـ
بالفرض والضلع ـ وـ ا هـ مشترك والزاوية ـ وـ ا هـ هـ ـ وـ ا هـ هـ ـ وـ ا هـ هـ
لقيامهما يكون المثلث ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ
هذين المثلثين أن يكون ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث ان المائل ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ
يكون المثلث ـ وـ ا هـ متساوي الساقين فينتهذ يكون العمود ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ
من رأسه على قاعدته مارة بوسطها أي يكون ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ وهو
المطلوب

(وبرهان القضية الرابعة) أن يقال حيث ان البعد ـ وـ هـ ـ وـ ا هـ يكون
المائل ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ ـ وـ ا هـ
 ـ وـ وـ هـ ـ وـ وـ هـ ـ وـ وـ هـ ـ وـ وـ هـ ـ وـ وـ هـ ـ وـ وـ هـ ـ وـ وـ هـ

= للزاوية ح - ا لقيامهما والضلع ح - مشترك والضلع و - =
 للضلع - ا بالعمل (كفاي النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين
 المثلثين أن يكون ح = ح ا وأيضاً اذا وصل و د يحدث مثلث
 و د - = للمثلث د - ا لان الزاوية و د - = للزاوية د - ا لقيامهما
 والضلع د - مشترك والضلع و - = للضلع - ا بالعمل (كفاي
 النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون و د = د ا
 لكن ا د + د و < ا ح + ح و أى ا د < ا ح أو
 ا د < ا ح و ا ح = ا ه فيكون ا د < ا ه وهو المطلوب
 (وبرهان القضية الخامسة) أن يقال - حيث ان المائل ا د اطول من
 المائل ا ه يكون البعد د - ا كبر من البعد د - ه لانه لو لم يكن
 البعد د - ا كبر من البعد د - ه لكان مساوياً له أو اصغر منه فان كان
 مساوياً له يلزم أن يكون المائل د ا مساوياً للمائل ا ه وهذا مخالف
 للمفروض وان كان اصغر منه يلزم أن يكون المائل د ا اصغر من المائل
 ا ه وهو أيضاً مخالف للمفروض فاذن يكون البعد د - ا كبر من البعد
 د - ه وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولاً أن البعد الحقيقي بين نقطة ومستقيم هو العمود النازل منها عليه
 لانه تبين أن العمود اصغر من كل مائل مار بها وبأى نقطة من نقطة
 وثانياً أنه لا يمكن أن يوصل من نقطة الى مستقيم ثلاثة خطوط مستقيمة
 متساوية لانه تبين أن المائل الالبعد عن العمود هو الاطول من المائل الاقرب
 للعمود المذكور

* (الدعوى السابعة عشر النظرية شكل ٣٢) *

اذا اقيم عمود على وسط مستقيم محدود فاعلم أولاً أن البعدين الموصولين من
 أى نقطة من نقط العمود الى نهايتى المستقيم المذكور يكونان متساويين
 وثانياً أن البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود الى نهايتى المستقيم

المذكور

المذكور لا يكونان متساويين

أى اذا اقيم عمود $و ه$ على وسط مستقيم $ا ب$ محدودين نقطتين $ا و ب$
فان البعدين $ا د و ب د$ يكونان متساويين
والبعدين $ا د و ب د$ لا يكونان متساويين
(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان البعد $ا د = ح د$ بافترض
يكون المائل $د ا = د ب$ والمائل $ا د = و د$ والمائل $ا ه$
 $= ه د$ (كفا في النظرية السادسة عشر)

فتبين بهذا أن البعدين الموصولين من أى نقطة من نقط العمود $ه د$ الى
نهايتى المستقيم $ا ب$ يكونان متساويين
(وبرهان القضية الثانية) أن نفرض نقطة مثل $ر$ خارج العمود $ه د$
ثم يوصل $را و رب$ ثم يوصل $د ب$ فيكون $ا د = د ب$ كما سبق
وحيث ان في المثلث $د ب ر$ الضلع $د ب > د ر + د ب = د ب$
 $د ا$ يكون $د ر > د ا + د ب$ و $د ر + د ا = د ب$ فيكون $د ر > د ا$
 $> را$ أى ان البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود $ه د$ الى
نهايتى المستقيم $ا ب$ لا يكونان متساويين بل القاطع للعمود اطول من
الآخر

وينتج من هذه النظرية

أولا انه اذا كان المستقيم نقطتان كلتاهما على بعدين متساويين من نهايتى
مستقيم آخر كان المستقيم الاول عمودا على وسط الاخر لان المستقيم الذى
بهذه المناسبة يتحدد بالعمود المار بوسط المستقيم المفروض لا اشتراك معه
فى نقطتين

وثانيا انه اذا كانت نقطة خارج مستقيم وكان البعدان الواصلان منها
الى نهايتيه غير متساويين كانت خارج العمود المار بوسط المستقيم
المذكور

لانها لو كانت عليه لكان البعدان الواصلان منها الى نهايتى المستقيم المفروض

متساويين وهذا مخالف للمقروض

(الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ٣٣)

يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا تساوى منهما الوتر والزاوية غير القائمة
كل نظيره أى اذا كان الوتر $a =$ للوتر d و الزاوية الحادة $\alpha =$
لنظيرتها γ ويكون المثلث $a - \gamma =$ للمثلث $d - \delta$ و
(برهانه) أن يقال لو وضع المثلث $a - \gamma$ على المثلث $d - \delta$ بحيث
تقع النقطة a على النقطة d والوتر a على الوتر d ولوقت
النقطة γ على النقطة δ وحيث ان الزاوية $\gamma =$ و يقع الضلع
 $\gamma -$ على الضلع δ وكذا النقطة γ على النقطة δ والا لا يمكن
تنزيل عمودين من النقطة d على المستقيم $\gamma - \delta$ وهو محال فاذن تكون
الزاوية $a =$ للزاوية d ويكون المثلث $a - \gamma =$ للمثلث $d - \delta$ و
وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل ٣٤)

يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا تساوى منهما الوتر وأحد الضلعين المحيطين
بالقائمة كل نظيره

أى اذا كان الوتر $a =$ للوتر a' والضلع $a - =$ للضلع $a' -$
يكون المثلث $a - \gamma =$ للمثلث $a' - \gamma'$

(برهانه) أن يقال لو وضع المثلث $a - \gamma$ ملاصقا للمثلث $a' - \gamma'$ بحيث
يتحد الضلع $a -$ بالضلع $a' -$ لصار الضلع $\gamma -$ على استقامة الضلع
 $\gamma' -$ لان كلا من الزاويتين المتجاورتين $\gamma - a$ و $a' - \gamma'$ قائمة ويلزم
من كون المائل $\gamma - a =$ للمائل $a' - \gamma'$ أن يكون البعد $\gamma - =$
للبعد $\gamma' -$ فاذن يكون المثلث $a - \gamma =$ للمثلث $a' - \gamma'$ وهو

المطلوب

المطابق

• (الدعوى العشرون النظرية شكل ك) •

اذا انصفت زاوية بمستقيم فاعلم اقلا أن العمودين النازلين على ضلعيها من أى نقطة من نقطة متساويان

وثانياً أن بلع مودين الازاين على ضلعها من أى نقطة خارجة عنه ليسا متساويين

أى اذا نصفت زاوية مثل α β بمستقيم α β فاعلم أولا أن العمودين
 α β والنازلين على ضلعها α β من أى نقطة من نقط
الخط α β كالنقطة γ يكونان متساويين

وثانياً أن العمودين هـ و هـ ط النازلين على ضلعها - ا و ا ح
من نقطة مثل هـ خارجة عن المستقيم ا ح لا يكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية α و β للزاوية α
 فرضا و الوتر α و مشترك بين المثلث α و β القائم الزاوية في β
 والمثلث α و β القائم الزاوية في α يكون المثلثان متساويين ويلزم من
 تساويهما أن يكون البعد α و β للبعد α و β وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن ينزل من النقطة ϵ عمود $\epsilon\delta$ على الضلع ac ثم يوصل مستقيم hd فيكون العمود $طه$ اصغر من المائل $هـ ل$ وحيث ثبت في المثلث $هـ ل \epsilon$ أن الضلع $هـ ل > \epsilon هـ$ $\epsilon ل$ وأن $\epsilon ل = \epsilon د$ يكون $هـ ل > \epsilon د + \epsilon هـ$ لكن $\epsilon د + \epsilon هـ = \epsilon د هـ$ فيكون $هـ ل > \epsilon د هـ$ وحيث إن $طه > هـ ل$ يكون $طه > هـ د$ وهو المطلوب

❁ (تیسرا) ❁

المستقيم المنصف زاوية هو المثل الهندسي لكل نقطة بعدها عن ضامى
الزاوية متساويان

• (الدعوى الحادية والعشرون النظرية شكل كا) •

المستقيمان العمودان على ثالث متوازيان أى اذا كان مستقيمان مثل
 د ه و ه و عمودين على مستقيم ثالث مثل ا ب - كانا متوازيين
 (برهانه) أن يقال لو لم يكونا متوازيين لا يمكن تلاقيهما فى نقطة مثل ط
 ويلزم من هذا امكان تنزيل عمودين على مستقيم واحد من نقطة واحدة وهو
 محال كحاثين (فى النظرية الخامسة عشر)

* (الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل ك ب) *

أى زاوية فهى اكبر من أى مساحة مستطيلة ونعنى بالساحة المستطيلة
 الساحة غير المحدودة الحادثة من ثلاثة خطوط مستقيمة اثنان منها عمودان
 على الثالث كالساحة الحادثة من الخطوط ا ب - و ب ح و ح ط
 (وبرهانه) أن ترسم فى الزاوية القائمة ا ب ح زاوية صغيرة مثل ا ب د
 وترسم بجانب هذه الزاوية الصغيرة زاوية د ه د = ا ب د وبجانب الزاوية
 د ه د زاوية ه د و تساوى الزاوية د ه د وبجانب هذه الزاوية
 الثالثة زاوية رابعة تساوى الثالثة وبجانب الرابعة خامسة تساوىها ثم سادسة
 تساوى الخامسة وهكذا وبهذه الكيفية يزيد مجموع تلك الزوايا عن الزاوية
 القائمة ا ب ح

واذا اخذ ع ح = ح ب و ل ع = ع و و س ل = ل ع
 وهكذا واقمت أعمدة ح ط و و ك و ل م و س ع الخ على ب ح
 فالساحة المستطيلة ا ب ح ط تساوى الساحة المستطيلة ط ح و ك
 لأنه لو حركت الاولى حول ح ط وطبقت على الثانية لانطبقت القائمة
 ب ح ط على القائمة ط ح و وانطبق المستقيم ب ح على مساويه
 ح و و وقعت النقطة ب على النقطة و و وقعت الزاوية ا ب ح على
 مساويتها ح و ك و وقع الضلع ب ا على ك و وانطبقت الساحة
 ا ب ح ط على ط ح و ك وساوتهما وبمثل هذا يبرهن على أن الساحة
 ط ح و ك مساوية للساحة ك ل م وأن هذه مساوية لتاليتهما وهكذا
 وحيث ان مجموع تلك المساحات لا يعلو الزاوية القائمة ا ب ح يظهر أن

الزاوية

الزاوية α β γ اكبر من الساحة α β γ ط بمعنى أن أي زاوية
كبيرة كانت او صغيرة اكبر دائما من أي ساحة مستطيلة

* (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل ك ب) *

أي مائل على مستقيم يقطع دائما العمود على المستقيم المذكور
أي اذا كان مستقيم مثل γ مائلا على مستقيم مثل α وكان المستقيم
 α عمودا على γ فان المائل γ والعمود α يتقاطعان
اذا امتدّا امتدادا كافيا

(برهانه) أن يقال لو أقيم من النقطة γ عمود δ على α لحدثت
زاوية δ γ اكبر من الساحة δ γ α ويلزم من هذا أن تخرج
هذه الزاوية عن الساحة المذكورة وحيث كان الضلع δ γ مشتركا
بين الزاوية δ γ والساحة δ γ α يلزم لخروج الزاوية عن الساحة
أن يقطع امتداد الضلع الآخر δ من الزاوية احدا ضلاع الساحة ويكون
 δ قاطعا للضلعين α و γ δ من اول الامر لا يمكن أن يقطعهما مرة
اخرى فاذن يقطع الضلع α وهو المطلوب

* (تنبيه) *

اذا كانت الزاوية الحادثة بين المستقيم α والمستقيم المائل عليه المارة
بالنقطة γ منفرجة ك الزاوية α γ δ مثلا يمتد المائل γ δ على
استقامته جهة γ فتحدث بينه وبين امتداد العمود δ γ زاوية δ γ δ
حادة اكبر من الساحة δ γ δ ويلزم من هذا أن الضلع γ δ الذي
هو امتداد المائل γ δ يقطع الضلع α الذي هو امتداد العمود α δ
* (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ك ج) *

اذا اخذت نقطة خارج مستقيم امكن دائما أن يمتد منها مستقيم يوازي المستقيم
المذكور لا اثنان

أي اذا اخذت نقطة مثل γ خارج مستقيم مثل α فاعلم أولا انه يمكن

دائماً أن يثبت منها مستقيم يوازي المستقيم a -
 وثانياً أنه لا يمكن أن يثبت منها اثنان يوازيان المستقيم المعلوم a -
 (برهان القضية الاولى) أن يقال لو انزل من النقطة o عمود مثل $و ه$
 على المستقيم المعلوم a - واقیم من النقطة المذكورة $و$ عمود مثل $ح د$
 على $و ه$ لكان المستقيم $ح د$ موازياً للمستقيم المعلوم a - لان
 المستقيمين $ح د$ و a - عمودان على مستقيم واحد $و ه$ وهو
 المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو مذهب من النقطة $و$ مستقيم غير $ح د$
 مثل $ط ح$ لم يكن عموداً على $و ه$ فيقطع a -

* (الدعوى الخامسة والعشرون النظرية شكل كد) *
 المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان أى اذا كان مستقيمان مثل $ح د$ و
 $و ه$ موازيين لثالث مثل a - كاتا متوازيين
 (برهانه) أن يقال لو امكن تلاقيهما في نقطة مثل $م$ لا يمكن ان يثبت
 نقطة واحدة مستقيمان موازيان لثالث وهو محال

* (الدعوى السادسة والعشرون النظرية شكل كه) *
 كل مستقيم قطع احد متوازيين يقطع الآخر أى ان اى مستقيم مثل $ه و$
 اذا قطع احد متوازيين مثل a - فانه يقطع الموازى الآخر مثل $ح د$
 (برهانه) أن يقال لو فرض المستقيم $ه و$ موازياً للمستقيم $ح د$
 لا يمكن أن يثبت من نقطة تقاطع المستقيم $ه و$ بالمستقيم a - مستقيمان
 موازيان للمستقيم $ح د$ وقد تقدم أن هذا محال

* (الدعوى السابعة والعشرون النظرية شكل كو) *
 أى عمود على احد متوازيين يكون عموداً على الآخر
 أى اذا وجد مستقيمان متوازيان مثل a - و $ح د$ ومستقيم مثل $و ه$ و
 عمود على المستقيم a - كان عموداً أيضاً على المستقيم $ح د$ فيلزم أن يكون
 عموداً عليه

(برهانه)

(برهانه) أن يقال لو لم يكن \angle و \angle عمودا على $هـ$ و لمكان ما تلا عليه ويلزم
من هذا اتلاقيه بالعمود $ا-هـ$ وهو محال

• (نمارين شكل ٣٨) •

إذا قطع مستقيم مستقيمين حدث عن تقاطعه بهما ثمان زوايا أربع منها وهي
الكائنة في المسافة التي بين المتوازيين تسمى زوايا داخلية والأربع الأخرى تسمى
زوايا خارجية

أي إذا قطع مستقيم مثل $هـ$ و مستقيمين مثل $ا-هـ$ و $و-هـ$ فالزوايا
الخارجية $و-هـ$ و $ح-هـ$ و $ح-هـ$ و $ن-هـ$ و تسمى زوايا داخلية والزوايا
الخارجية $و-هـ$ و $ن-هـ$ و $ح-هـ$ و $و-هـ$ و تسمى زوايا خارجية
فأما الزاويتان $ا-هـ$ و $ح-هـ$ و $ن-هـ$ و $و-هـ$ فتسميان زاويتين متبادلتين داخلتين
وكذلك الزاويتان $ح-هـ$ و $ن-هـ$ و $و-هـ$ و $ا-هـ$
وأما الزاويتان $ا-هـ$ و $و-هـ$ و $ح-هـ$ و $ن-هـ$ فتسميان زاويتين متبادلتين خارجيتين
وكذلك الزاويتان $ح-هـ$ و $ا-هـ$ و $و-هـ$ و $ن-هـ$
وأما الزاويتان $ا-هـ$ و $ح-هـ$ و $ن-هـ$ و $و-هـ$ فتسميان متناظرتين بالخرج
والداخل

وكذلك الزاويتان $ح-هـ$ و $ا-هـ$ و $و-هـ$ و $ن-هـ$ والزوايتان $ا-هـ$ و $ح-هـ$ و
الزاويتان $ح-هـ$ و $ن-هـ$ و $و-هـ$ و $ا-هـ$
وأما الزاويتان $ا-هـ$ و $ح-هـ$ و $ن-هـ$ و $و-هـ$ المجاورتان للقاطع فتسميان متجاورتين
داخليتين وكذلك الزاويتان $ح-هـ$ و $ا-هـ$ و $و-هـ$ و $ن-هـ$
وأما الزاويتان $ا-هـ$ و $و-هـ$ و $ح-هـ$ و $ن-هـ$ فتسميان متجاورتين خارجيتين وكذلك
الزاويتان $ح-هـ$ و $ا-هـ$ و $و-هـ$ و $ن-هـ$

• (الدعوى الثامنة والعشرون النظرية شكل ٣٩) •

إذا قطع المستقيم مستقيمين متوازيين فاعلم
أولا أن الزاويتين المتبادلتين متساويتان
وثانيا أن الزاويتين المتناظرتين متساويتان

وثالثا أن الزاويتين المتبادلتين الخارجيتين متساويتان
ورابعا أن الزاويتين المتجاويتين الداخليتين متتامتان لبعضهما أى ان مجموعهما
يساوى قائمتين

وخامسا أن الزاويتين المتجاويتين الخارجيتين متتامتان لبعضهما
(برهان القضية الاولى) أن يقال لو نصف البعد ر ح بنقطة مثل ط
وانزل منها عمود ط ك على ح د ومدة ك ط على استقامته جهة
ط حتى لاقى المستقيم ا ب فى ع لكان ك ع عمودا على الخط
ا ب الموازى للخط ح د لانه قد ثبت فى النظرية السابعة والعشرين أن
العمود على احد المتوازيين عمود على الاخر فـ يكون المثلثان الحادثان
ك ع ط و ط ر ع قائمى الزاوية ومتساوفين لان الوتر ع ط مساو
للوتر ط ر بالعمل والزاوية ح ط ك مساوية للزاوية ر ط ع
لتقابلهما برأسيهما (كفا فى النظرية الثامنة عشر) ويلزم من تساوى هذين
المثلثين أن تكون الزاوية ك ع ط مساوية للزاوية ط ر ع وهو
المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ع ط =
ط ر ع و ط ر ع = ا ر ه لتقابلهما بالرأس تكون الزاوية ك ع ط
= ا ر ه وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ع ط =
ط ر ع و ك ع ط = و ع د و ط ر ع = ا ر ه تكون الزاوية
و ع د = ا ر ه وهو المطلوب

(وبرهان القضية الرابعة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ع ط =
ط ر ع وقد علم أن ك ع ط + ط ح د = قائمتين فيكون ط ر ع
+ ط ح د = قائمتين وهو المطلوب

(وبرهان القضية الخامسة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ع ط =
ا ر ه وقد علم أن ك ع ط + ك ع و = قائمتين فيكون ا ر ه + ك ع و =

لح ح و = قائمتين وهو المطلوب

* (تنبيه) *

المستقيمان المتوازيان المقطوعان بقاطع مائل يتكون من تقاطعهما بهما ثمان زوايا منها اربع حادة واربع منفرجة والاربع الاول متساوية والاخر كذلك
هـ كل زاوية من الاربع الاول تتم أى زاوية من الاربع الاخر

* (الدعوى التاسعة والعشرون النظرية شكل كز) *

المستقيمان المقطوعان بمستقيم يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين

أى ان أى مستقيمين مثل ا ب و ح د اذا قطعهما ثالث مثل هـ و يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان $\angle ر ح و$ و $\angle ر ح د$ متساويتين

(برهانه) أن يقال لو نصف البعد ر ح بنقطة مثل ط وانزل منها عمود
مثل ط ك على ح د و م د العمود على أ س تقامته جهة ط حتى
لاقي المستقيم ا ب في نقطة مثل ع لحدث مثلثان متساويان ك ع ط
و ط ر ع لان الضلع ح ط = للضلع ط ر بالعمل والزاوية ك ع ط
= للزاوية ط ر ع فرضا والزاوية ك ط ح = ع ط ر انقابلهما
بالرأس (كما في النظرية السابعة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون
الزاوية ر ع ط = للزاوية ط ك ع لكن الزاوية ط ك ع قائمة
بالعمل فيلزم أن تكون الزاوية ر ع ط كذلك ويلزم من هذا أن يكون
المستقيم ا ب عمودا على المستقيم ك ع وأن يكون موازيا للمستقيم
ح د لانه تميز في النظرية الحادية والعشرين أن المستقيمين العمودين على
ثالث متوازيان وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتبادلتان الخارجتان متساويتين

أى اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان أره و د ح و متساويتين
يكون المستقيمان ا ب و د ح متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان الزاوية $\text{أره} = \text{د ح و}$ بالتقابل والزاوية
 $\text{د ح و} = \text{د ح ر}$ كذلك و $\text{أره} = \text{د ح و}$ بالفرض تكون الزاوية
 $\text{د ح ر} =$ للزاوية د ح ر ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا ب
و د ح متوازيين وهو المطلوب

وثانيا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المناظرتان متساويتين

أى اذا كانت الزاويتان المناظرتان أره و د ح ر متساويتين يكون
المستقيمان ا ب و د ح متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان الزاوية $\text{أره} =$ للزاوية د ح و بالتقابل
والزاوية $\text{أره} = \text{د ح ر}$ بالفرض تكون الزاوية $\text{د ح و} =$ للزاوية
 د ح ر ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا ب و د ح متوازيين وهو
المطلوب

وثالثا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتجاورتان الداخلتان متممتين لبعضهما

أى اذا كانت الزاويتان المتجاورتان الداخلتان أره و د ح د متممتين
لبعضهما يكون المستقيمان ا ب و د ح متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان مجموع الزاويتين المتجاورتين أره و أ د ح
مساو لثلاثين ومجموع الزاويتين أ د ح و د ح د مساو لثلاثين يكون
 $\text{أره} + \text{أ د ح} = \text{أ د ح} + \text{د ح د}$ فاذا طرحنا الزاوية المشتركة
 أ د ح تبقى الزاوية $\text{أره} =$ للزاوية د ح د ويلزم من هذا أن يكون
المستقيمان ا ب و د ح متوازيين وهو المطلوب

ورابعا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت
الزاويتان المتجاورتان الخارجتان متممتين لبعضهما

أى إذا كانت الزاويتان المتجاورتان الخارجتان أره و حع و قائمتين
 لبعضهما يكون المستقيمان ا- و د متوازيين
 (برهانه) أن يقال حيث أن مجموع الزاويتين المتجاورتين أره و حع مساو لقائمتين
 مساو لقائمتين وبالفرض مجموع المتجاورتين أره و حع و مساو لقائمتين
 يكون $\text{أره} + \text{حع} = \text{ا-} = \text{د}$ فإذا طرحنا
 الزاوية المشتركة أره تبقى الزاوية $\text{حع} = \text{د}$ للزاوية حع و
 يلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا- و د متوازيين وهو
 المطلوب

(الدعوى الثلاثون النظرية شكل كط) *

إذا قطع مستقيم مستقيمين وكان مجموع الزاويتين المتجاورتين الداخليتين أكبر
 أو أصغر من القائمتين فالمستقيمان المذكوران يلتقيان في الجهة التي يكون
 فيها مجموع الزاويتين المذكورتين أصغر من القائمتين
 أى إذا قطع مستقيم مثل هـ و مستقيمين مثل ا- و ر- وكان
 مجموع الزاويتين المتجاورتين الداخليتين ا ح ط و ح ط ر أصغر من قائمتين
 فالمستقيمان ا- و ر- يلتقيان جهة ا و ر
 (برهانه) أن يقال يلزم من $\text{كون مجموع الزاويتين ا ح ط و ح ط ر}$
 أصغر من قائمتين أن يكون المستقيمان ا- و ر- غير متوازيين لأنهما
 لو كانا متوازيين لكان مجموع الزاويتين ا ح ط و ح ط ر مساوياً
 لقائمتين وهذا مخالف للمفروض فتبين بهذا أن المستقيمين المذكورين يكونان
 غير متوازيين بقى علينا أن نبين الجهة التي يلتقيان فيها فنقول لو تمددنا النقطة
 ط مستقيم مثل د يوازي المستقيم ا- لظهر أن المستقيم ر-
 يمنع مع المستقيم د زاوية ر ط د وأنه إذا امتد يصنع مع ا- زاوية
 مبادلة ومساوية لها وحيث كانت رأس احداهما في ط يلزم أن تكون
 رأس الأخرى جهة د أى أن المستقيمين ا- و ر- يلتقيان جهة
 د وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية والثلاثون النظرية شكل ٤٠) *

المستقيمان المتوازيان يكونان على أبعاد متساوية أى إذا توازى مستقيمان
مثل $ا ب$ و $ج د$ كان العمودان $ح و و$ المحصوران بينهما متساويين
(برهانه) أن يقال لو وصل المستقيم $و ر$ لكان المثلثان $الحادثان ح و ر$
و $ر و ه$ متساويين لان الضلع $و ر$ مشترك والزاوية $ح و ر =$ للزاوية
 $ر و ه$ بالتبادل والزاوية $ح و ر =$ للزاوية $ر و ه$ بالتبادل كذلك
(كفاية النظرية السابعة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون
العمودان $ح و و$ متساويين وهو المطلوب

* (الدعوى الثانية والثلاثون النظرية شكل ٤٠) *

المستقيمان اللذان على أبعاد متساوية يكونان متوازيين
أى ان المستقيمين اللذين على أبعاد متساوية مثل $ا ب$ و $ج د$ يكونان
متوازيين

(برهانه) أن يقال لو وصل مستقيم مثل $و ر$ لكان المثلثان $الحادثان$
 $ح و ر$ و $ر و ه$ متساويين لان الضلع $و ر$ مشترك والضلع $ح و =$
للضلع $ر و ه$ فرضا والزاوية $ح و ر =$ للزاوية $ر و ه$ بالتبادل (كفاية
النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية
 $ح و ر =$ للزاوية $ر و ه$ ويلزم من كونهما متبادلتين أن يكون
المستقيمان $ح د و ا ب$ متوازيين وهو المطلوب

* (الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية شكل اب) *

العمود المحصور بين المتوازيين أصغر من كل مائل محصور بينهما
أى أن العمود $ه و$ المحصور بين المتوازيين $ا ب$ و $ج د$ أصغر من كل
مائل مثل $ح ط$ محصور بينهما

(برهانه) أن يقال لو أنزل من النقطة $ح$ عمود $ح ك$ على $ج د$ لكان
 $ه و = ح ك$ كفاية النظرية الحادية والثلاثين لكن العمود $ح ك >$
المائل $ح ط$ ويلزم من كون العمود $ح ك >$ المائل $ح ط$ أن يكون

العمود

العمود هـ و أصغر من المائل ح ط وهو المطلوب

(تنبيه)

إذا كان العمود هـ و والمائل ح ط متقاطعين في نقطة بين المتوازيين كالنقطة سـ يقال في البرهان من المعلوم أن العمود هـ سـ > المائل سـ ح والعمود سـ و > المائل سـ ط وان مجموع العمودين أصغر من مجموع المائلين أي هـ سـ + سـ و > سـ ح + سـ ط لكن هـ سـ + سـ و = هـ و و سـ ح + سـ ط = ح ط فاذن يكون هـ و > ح ط وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية شكل ط)

المستقيم الموازي لأحد مستقيمين متلاقين يتلاقى بالمستقيم الموازي للآخر على زاويتين أحدهما تساوي زاوية المستقيمين المتلاقين والآخرى تتمها

أي إذا تلاقى مستقيمان مثل ا ب و ب ح ومستمقيم مثل ط ل موازي للمستقيم ا ب ومذأيضا مستقيم مثل و ك موازي للمستقيم ب ح فالمستقيمان ط ل و و ك يلتقيان على زاويتين أحدهما د هـ و = ا ب ح والآخرى د هـ ك تتمها

*(برهانه) أن يقال لو لم يتلاقى المستقيم و ك بالمستقيم ط ل لكانا متوازيين

ويلزم من هذا أنه يمكن أن يمد من نقطة واحدة مثل ب مستقيمان مثل ا ب و ب ح موازيان لمستقيم مثل و ك وقد تقدم أنه محال فحينئذ المستقيمان و ك و ط ل لا يتوازيان بل يلتقيان

ويلزم من توازي المستقيمين ا ب و ط ل أن تكون الزاويتان المتبادلتان الداخلتان ا ب ح و ب ح هـ متساويتين ومن توازي المستقيمين ب ح و و ك أن تكون المتبادلتان الداخلتان ب ح هـ و د هـ و متساويتين فاذن تكون الزاويتان ا ب ح و ب ح هـ متساويتين وهو

المطلوب

* (تنبيهات) *

الاول يحدث من تلاقى ط ل و و ك اربع زوايا منها اثنتان كلتاهما تساوى زاوية المستقيمين المعلومين واثنتان كلتاهما تتمم الزاوية المذكورة فاما الزاويتان د ه و و ك ه ل فكلتاها تساوى الزاوية ا ب ح واما الزاويتان د ه ك و ل ه و فكلتاها تتمم الزاوية ا ب ح .
الثاني تكون الزاويتان متساويتين اذا كان كل ضلع منهما موازيا لنظيره سواء كان على اتجاهاه أو على عكس اتجاهاه

الثالث تكون الزاويتان متممتين لبعضهما اذا كان كل ضلع منهما موازيا لنظيره وكان اتجاها أحدهما على عكس اتجاها نظيره واتجاها الضلع الآخر كاتجاها نظيره

* (الدعوى الخامسة والثلاثون النظرية شكل لد) *

العمود المقام على أحد مستقيمين متلاقين يتلاقى بالعمود المقام على المستقيم الآخر على زاويتين احدهما تساوى زاوية المستقيمين المعلومين والاخرى تتمها

أى ان المستقيم مثل د ط العمود على مستقيم مثل ا ب متلاق بالمتقيم ا ب يتلاقى بالعمود و ح المقام على المستقيم ا ب على زاويتين احدهما د ه و تساوى الزاوية ا ب ح والاخرى و ه ط تتمها

(برهانه) أن يقال لو أقيم من رأس الزاوية ا عمود ا ك على ا ب وعمود ا ع على ا ب لكان و ح موازيا ا ك و د ط موازيا ا ع وبقتضى النظرية السابقة يتلاقى و ح بالمستقيم د ط وحيث ان كلا من المستقيمين ا ع و ه د عمود على المستقيم ا ب وكلا من المستقيمين ا ك و ه و عمود على المستقيم ا ب تكون الزاوية ك ا ع مساوية للزاوية د ه و لانه قد تقدم أن الزاويتين اللتين أضلاعهما المتناظرة متوازيتان وموجهة الى جهة واحدة متساويتان وحيث ان المستقيم

ا ب عود على المستقيم ا ب يكون ا ب ك ا ب = قائمة
 وأيضا حيث ان المستقيم ا ب عود على المستقيم ا ب يكون ا ب ك
 + ا ب = قائمة ويلزم من هذا أن يكون ا ب ك ا ب = قائمة
 ا ب ك + ا ب فاذا طرحت الزاوية المشتركة ا ب ك من الطرفين
 نتج أن الزاوية ك ا ب = ا ب و يلزم من كون الزاوية ك ا ب =
 للزاوية د ه و أن تكون الزاويتان ا ب و د ه و متساويتين وهو
 المطلوب

ومن المعلوم أن الزاوية و ه ط مقيمة للزاوية د ه و فهي مقيمة للزاوية
 ا ب و

* (تنبيه) *

يحدث من تلاقى المستقيمين و ح و ط العودين على المستقيمين
 المتلاقين ا ب و ا ب أربع زوايا منها اثنتان كلتاها متساويتان
 المستقيمين المعلومين و اثنتان كلتاها متممة الزاوية المذكورة فاما الزاويتان
 د ه و و ح ه ط فكلتاها متساويتان الزاوية ا ب و واما الزاويتان
 د ه ح و و ه ط فكلتاها متممة الزاوية ا ب و

* (الدعوى السادسة والثلاثون النظرية شكل له) *

اذا امتد ضلع من مثلث فالزاوية الحادثة بمدة تساوى مجموع زوايا الداخل
 الالجاورة لها

أى اذا امتد الضلع ا ب على استقامته جهة ح مثلا فالزاوية الحادثة
 ا ب د تساوى مجموع زاويتي الداخلين ا ب و ا ب و
 (برهانه) أن يقال لو مدت من النقطة ح مستقيم مثل ح ه يوازي الضلع
 ا ب لانقسمت الزاوية ا ب د الى زاويتي احداها ا ب ه = ا ب
 بالتبادل والاخرى ه ح د = ا ب بالتناظر لكون المستقيمين ا ب
 و ح ه متوازيين مقطوعين بالمستقيم ا ب فاذن يكون ا ب ه +
 ه ح د = ا ب + ا ب = ا ب + ا ب = ا ب + ا ب = ا ب + ا ب

فيكون $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$ وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا أن كل مثلث مجموع زواياه يساوي قائمتين

أي أن مجموع الزوايا $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ يساوي قائمتين

(برهانه) أن يقال يلزم من كون الزاوية $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$ أن يكون

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 + \angle 1$ ويلزم من كون مجموع

المتجاورتين $\angle 1 + \angle 2$ مساويا لقائمتين أن يكون $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$

$\angle 2 + \angle 3 + \angle 1$ قائمتين فتبين بهذا أن كل مثلث مجموع زواياه يساوي قائمتين

وثانيا أنه إذا علم من مثلث زاويتان كل على حدتها أو مجموعهما علمت الثالثة

بطرح المعلوم من مقدار القائمتين لانها متممة لمجموعهما

وثالثا أنه إذا تساوت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر كل نظيرة

كانت الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية لنظيرتها من الثاني وكان

المثلثان متساويي الزوايا المتناظرة

أي إذا كانت الزاوية $\angle 1 =$ للزاوية $\angle 2$ والزاوية $\angle 3 =$ للزاوية $\angle 4$

كانت الزاوية $\angle 5$ مساوية للزاوية $\angle 6$

(برهانه) أن يقال يلزم من كون $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$ قائمتين

$\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 =$ قائمتين أن يكون $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$

$\angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ فإذا طرح من الطرفين الاول $\angle 2 + \angle 3$ ومن الثاني

$\angle 2 + \angle 3$ بقي $\angle 1 = \angle 4$ وهو المطلوب

ورابعا أنه إذا تساوى مجموع زاويتين من مثلث مجموع زاويتين من مثلث آخر

يدون أن تكون كل واحدة منهما مساوية لنظيرتها كانت الزاوية الثالثة من

المثلث الاول مساوية للثالثة من الثاني وفي هذه الحالة لا يكون المثلثان

متساويي الزوايا المتناظرة

وثامسا ان أى مثلث قائم الزاوية مجموع الزاويتين المجاورتين لوتر قائمته
يساوى قائمة لان مجموعهما يتم قائمة

وسادسا انه اذا كان المثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين ساوت كل زاوية
من المجاورتين لوتر قائمته نصفها

وسابعها انه لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان كل على حدتها اذ لو
كان كذلك للزم أن يكون مجموع زواياه الثلاث اكبر من قائمتين وهو محال
وثامنا انه لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان منفرجتان ولا منفرجة
وقائمة

وثاسعا ان أى مثلث منفرج الزاوية مجموع زاويتي المجاورتين لوتر منفرجه
اقل من القائمة

وعاشرا ان أى زاوية من أى مثلث متساوى الاضلاع تساوى ثلث القائمة
او ثلثي القائمة فاذا جعل مقدار القائمة وحدة كان مقدار زاوية المثلث
للمتساوى الاضلاع $\frac{1}{3}$ وان جعل مقدار القائمة ٩٠ درجة كان مقدار
زاويته ٣٠ درجة

• (الدعوى السابعة والثلاثون النظرية) •

بذا يوازى الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة
(برهانه) أن يقال لو فرضنا زوايا المثلث الاول بالحروف ا و ب و ج
ولزوايا المثلث الثاني بالرموز آ ب و ج وفرض أن ضلعي الزاوية
ا موازيان لضلعي الزاوية آ كل لتظيره وضلعي الزاوية ب لضلي الزاوية
ب وضلعي الزاوية ج لضلي الزاوية ج ولوحظ ما تقدم في النظرية
الرابعة والثلاثين لتحصل

$$ا = آ \text{ أو } ا + آ = قائمتين$$

$$ب = ب \text{ أو } ب + ب = قائمتين$$

$$ج = ج \text{ أو } ج + ج = قائمتين$$

و يلزم من كون مجموع زوايا المثلث مساويا لقائمتين أن يكون مجموع زوايا المثلثين مساويا لاربع قوائم و يلزم من هذا أن لا تكون الزاوية α مقمة للزاوية α والزاوية β مقمة للزاوية β والزاوية γ مقمة للزاوية γ في ان واحد اذ لو كانت كذلك ل لازم أن يكون مجموع زوايا المثلثين مساويا لست قوائم وهو محال بل لا يمكن أن تكون زاويتان من زوايا احد المثلثين مقمتين لنظيرتيهما من المثلث الآخر في آن واحد لانهما لو كانتا كذلك ل لازم أن يكون مجموع الزوايا الاربع المذكورة مساويا لاربع قوائم و يلزم من هذا انعدام الزاوية الثالثة من احد المثلثين وانعدام نظيرتها من المثلث الآخر وهو محال فتبين بهذا انه لا بد من أن يكون في احد المثلثين زاويتان كل منهما مساوية لنظيرتها من الآخر و يلزم من هذا أن تكون الثالثة من احدهما مساوية لنظيرتها كذلك وهو المطلوب

(الدعوى الثامنة والثلاثون النظرية)

اذا تعامدت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة (برهانه) أن يقال لو رمز لزوايا احد المثلثين بالحروف α و β و γ ولزوايا المثلث الآخر بالرموز α' و β' و γ' وفرض أن ضلعي الزاوية α عودان على ضلعي الزاوية α' كل على نظيره وأن ضلعي الزاوية β على ضلعي الزاوية β' وضلعي الزاوية γ على ضلعي الزاوية γ' ولوحظ ما تقدم في النظرية الرابعة والثلاثين لتحصل

$$\alpha = \alpha' \text{ أو } \alpha + \alpha' = \text{قائمتين}$$

$$\beta = \beta' \text{ أو } \beta + \beta' = \text{قائمتين}$$

$$\gamma = \gamma' \text{ أو } \gamma + \gamma' = \text{قائمتين}$$

لكن

اكن قد سبقت استحالة وجود المتساويات الثلاث الاخر فلم يبق الا أن $n = 1$

وهو المطلوب

* (الدعوى التاسعة والثلاثون النظرية شكل ٤٢) *

كل شكل كثير الاضلاع محدد بمجموع زواياه الداخلة يساوى من القوائم عدد اضلاعه الا اثنين مضروباً باقى طرحه فى اثنين أى أن أى شكل n كثير الاضلاع محدد بمثل المربع $n = 2 + 2 + 2 + \dots + 2$ بمجموع زواياه الداخلة يساوى من القوائم عدد اضلاعه الا اثنين مضروباً باقى طرحه فى اثنين أى

$$(n - 2) \times 2 = 2 \times 2 = 4 \text{ قوائم}$$

(برهانه) أن يقال ان أقطار هذا الشكل المارة من رأس زاوية واحدة تقسمه الى مثلثات بمجموع زواياها يساوى بمجموع زواياه ولا يخفى أن عدد اضلاعه يزيد على عدد تلك المثلثات بضلعين لان كل مثلث يشتمل على ضلع من اضلاع الشكل ما عدا المثلثين المتطرفين فان كلا منهما يشتمل على ضلعين وينتج من هذه النظرية

أولاً أن مجموع الزوايا الداخلة من أى شكل رباعى محدد يساوى $(4 - 2) \times 2 = 2 \times 2 = 4$ قوائم فان كانت تلك الزوايا متساوية كانت كل واحدة منها قائمة وهذه الخاصية فى المربع والمستطيل

وثانياً أن مجموع الزوايا الداخلة من أى شكل خماسى محدد يساوى $(5 - 2) \times 2 = 2 \times 3 = 6$ قوائم فان كان متساوى الزوايا كان مقدار أى زاوية من زواياه خمس الست قوائم أو ستة اخصاس القائمة وبهذه الكيفية يتعين مقدار زاوية أى شكل متساوى الزوايا عدد بضلاعه معين

* (تنبيهان) *

الاول إذا رمز بالحرف n لعدد اضلاع شكل محدد كان مجموع زواياه

الداخله مبيناً هذا القانون $(m - r) \times r = r - m$ اعني أن أى شكل مستقيم الاضلاع محذب مجموع زواياه يساوى قوائم
عددتها بقدر ضعف عدد اضلاعه الاربعه

الثانى أن هذه الدعوى لا تنطبق على أى شكل غير محذب
* (الدعوى الاربعون النظرية شكل ل ط) *

اذا مدت اضلاع مثلث الى اتجاه واحد بحيث لا تتكون خارجه تقابل داخله
كان مجموع الزوايا الحاده مساوياً لاربعة قوائم

أى اذا مدت الضلع $-$ على استقامته جهة $+$ والضلع $+$ جهة $-$

والضلع $-$ جهة $-$ ورمز للزوايا الحاده بالرموز $-$ و $+$ و $-$

يكون $- + + = -$ قوائم

(برهانه) أن يقال يلزم من كون $- + = -$ قائمتين و $+$

$+$ قائمتين و $- + = -$ قائمتين أن يكون

$- + + + = - + + + = -$ قوائم ويلزم من
هذا أن يكون

$- + + = -$ قوائم $- (- + +)$ لكن $-$

$+$ $+$ $+$ $= -$ قائمتين فيكون $- + + = -$ قوائم

$-$ قائمتين $=$ اربع قوائم وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية والاربعون النظرية شكل م) *

اذا مدت اضلاع شكل مستقيم الاضلاع محذب الى اتجاه واحد بحيث

لا تتكون خارجه تقابل داخله كان مجموع الزوايا الخارجيه الحاده مساوياً

لاربعة قوائم

أى اذا مدت الضلع $-$ على استقامته جهة $-$ والضلع $-$ جهة $+$

والضلع $+$ جهة $+$ والضلع $+$ جهة $-$ والضلع $-$ جهة $-$

عدد اضلاع الاشكال	مجموع زواياها الداخلية	مجموع زواياها الخارجية	مجموع زواياها الداخلة والخارجة معا
3	4	4	6
4	4	4	8
5	4	4	10
6	4	4	12
7	4	4	14
8	4	4	16
9	4	4	18
10	4	4	20
11	4	4	22
12	4	4	24
13	4	4	26
14	4	4	28
15	4	4	30
16	4	4	32
17	4	4	34
18	4	4	36
19	4	4	38
20	4	4	40

وبالتأمل في هذا الجدول يشاهد أنه يتركب من عدد أضلاع الاشكال متوالية عددية تصاعدية حدها الاول 3 وأساسها واحد وأنه يتركب من مجموع زواياها الداخلة متوالية عددية تصاعدية حدها الاول 4 وأساسها 2.

وأنه يتركب من مجموع زواياها الداخلة والخارجة معا متوالية عددية

تصاعدية

تساعدية حدها الاول ٦ واساسها ٢

وان مجموع زواياها الخارجة ثابت لا يتغير عن الاربع قوائم
• (الدعوى الثانية والاربعون النظرية شكل ١٤) •

قطر المتوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين

أى أن متوازي الاضلاع مثل $a - b$ و c ينقسم بالقطر d مثلا الى
مثلثين $a - b$ و $c - d$ متساويين

(برهانه) أن يقال يلزم من ككون المستقيمين $a - b$ و $c - d$ متوازيين
ومقطوعين بالقاطع d أن تكون الزاويتان المتبادلتان $a - b$ و
 $c - d$ متساويتين وكذلك يلزم من ككون المستقيمين $a - b$ و $c - d$
متوازيين ومقطوعين بالقاطع d أن تكون الزاويتان المتبادلتان $a - b$
و $c - d$ متساويتين وحيث ان الضلع d مشترك بين المثلثين $a - b$ و
 $c - d$ يكونان متساويين (كما تقدم اثباته في النظرية السابعة)

وينتج من هذه النظرية

أولا أن الاضلاع المتقابلة في أى شكل متوازي الاضلاع متساوية
وثانيا أن الزوايا المتقابلة في أى شكل متوازي الاضلاع متساوية
وثالثا أنه اذا تساوى ضلعان وزاوية بينهما من شكل متوازي الاضلاع
خلفهين آخرين وزاوية بينهما من شكل آخر متوازي الاضلاع تساوت بقية
أجزاء أحدهما بقية أجزاء الآخر كل بتطيره
ورابعا أنه اذا تساوى ضلعان متجاوران من شكل متوازي الاضلاع كانت
اضلاعه كلها متساوية

وسامسا أنه اذا كانت إحدى زوايا متوازي الاضلاع قائمة كانت زواياه
كلها كذلك

• (الدعوى الثالثة والاربعون النظرية شكل ١٤) •

كل شكل رباعي تساوت اضلاعه المتقابلة فهو متوازي الاضلاع
أى أى شكل رباعي مثل $a - b$ و $c - d$ اذا كان فيه الضلع $a - b$ مساويا للمقابل

د والضلع ا د مساويا لمقابلته ب د يكون متوازي الاضلاع ا ب د
يعكسكون الضلع ا - موازيا للضلع د والضلع ا د موازيا للضلع
ب د

(برهانه) أن يقال لو وصل القطر د - لكان المثلثان الحادثان ا د ب
و د - د متساويين لان الضلع د - مشترك بينهما والضلع ا د =
للضلع د د بالفرض والضلع ا د = للضلع د - كذلك كافي
(النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية
ا د ب = د د - والزاوية ا د - = د د - ويلزم من كون
المتبادلتين ا د د و د د متساويتين أن يكون المستقيمان ا د و د
متوازيين ومن تساوي المتبادلتين ا د - و د د أن يكون المستقيمان
ا د و د متوازيين فقد ثبت بهذا أن الاضلاع المتقابلة متوازية كما هي
متساوية فاذن يكون الشكل المذكور متوازي الاضلاع وهو المطلوب

* (الدعوى الرابعة والاربعون النظرية شكل ٤٤) *

اذا كان الضلعان المتقابلان في الشكل الرباعي متساويين ومتوازيين كان
الضلعان الاخران كذلك ويكون الشكل المذكور متوازي الاضلاع
أى اذا كان الضلعان المتقابلان مثل ا د و د من الرباعي ا ب د د
متساويين ومتوازيين كان الضلعان الاخران ا د و د متساويين
ومتوازيين وكان الشكل ا ب د د متوازي الاضلاع

(برهانه) أن يقال لو وصل القطر د - لكان المثلثان الحادثان ا د ب
و د د متساويين لان الضلع د - مشترك والضلع ا د = للضلع
د د بالفرض والزاوية ا د - = د د - بالتبادل لكون ا د و د
متوازيين وقد ثبت في النظرية السادسة أن المثلثين اللذين بينهما الضلع
متساويان ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن يكون الضلع ا د = للضلع
د د وأن تكون الزاوية ا د - = للزاوية د د - وحيث ان الزاويتين
ا د د و د د متبادلتان يكون الضلعان ا د و د متوازيين

فقد ثبت بهذا أن الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية فاذن يكون الشكل
الذي كور متوازي الاضلاع وهو المطلوب

• (الدعوى الخامسة والاربعون النظرية شكل ٤٥) •

قطر المتوازي الاضلاع ينصفان بعضهما

أي ان متوازي الاضلاع مثل $abcd$ اذا وصل قطراه ac و bd وكانت نقطة تقاطعهما في منتصف كل منهما أعني يكون $ah = hd$ و $he = hb$

(برهانه) أن يقال يلزم من كون الشكل متوازي الاضلاع ان يكون
الضلعان المتقابلان ab و cd متساويين ومتوازيين ويلزم من كونهما
متوازيين أن تكون الزاويتان المتبادلتان as و sd متساويتين
وأن تكون الزاويتان المتبادلتان sa و ad متساويتين وقد ثبت
في النظرية السابعة أن المثلثين اللذين بهذه المتباينة متساويان ويلزم من تساوي
هذين المثلثين أن يكون $ah = hd$ و $he = hb$ وهو
المطلوب

• (تنبيهان) •

الاول قطر المعين ينصفان بعضهما عمادا لانه يلزم من كون الضلع
 $ab = ad$ والضلع $sd = hd$ والضلع ah مشترك أن يكون
المثلث $asd =$ للمثلث ahd ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن
تكون الزاويتان as و ad متساويتين ويلزم من كونهما متجاورتين
ومتساويتين أن يكون المستقيم sd عمودا على المستقيم bd وهو
المطلوب

الثاني كل شكل رباعي تساوت أضلاعه فأقطاره تنصف زواياه وتنصف
بعضها عمادا

• (الدعوى السادسة والاربعون النظرية شكل ٤٦) •

قطر المستطيل متساويان

أى ان المستطيل مثل $ا-ب-ج-د$ قطرا مثل $ا-د$ و $ب-ج$ متساويين
(برهانه) أن يقال يلزم من كون الضلع $ا-ب$ مشتركا في المثلثين $ا-ب-ج$
و $ا-ب-د$ والضلع $ا-د$ = للضلع $ب-ج$ والقائمة $ا-ب$ = $ا-د$
أن يكون المثلثان المذكوران متساويين ويلزم من تساويهما أن يكون
القطران $ا-د$ و $ب-ج$ متساويين وهو المطلوب

(تنبيهات)

الاول قطرا المربع متساويان كما أن قطري المستطيل كذلك
الثاني قطرا المربع ينصفان زوايا د و ب نصفان بعضهما عمادا كما أن قطري
المعين كذلك

الثالث الشكل الرباعي يكون متوازي الاضلاع اذا كان كل من قطريه
منصفالاخر

(الدعوى السابقة والاربعون النظرية شكل مو)

اذا نصف أحد اضلاع مثلث بنقطة ومد منها مستقيم يوازي أحد الضلعين
الباقين فاعلم أولا أنه يمر بوسط الضلع الثالث وثانيا أنه يكون مساويا لنصف
الضلع الموازي له

أى اذا نصف ضلع مثل $ا-ب-ج$ من المثلث $ا-ب-ج$ بنقطة مثل $د$ ومد منها
مستقيم مثل $هـ$ يوازي الضلع $ب-ج$ فاعلم أولا أنه يمر بوسط الضلع
الثالث $ا-ب$ أعني يكون $ا-د$ = $د-ب$ وثانيا أنه يكون مساويا لنصف
 $ب-ج$ أعني يكون $د-هـ$ = $\frac{ب-ج}{2}$

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو مد من النقطة $د$ مستقيم مثل $هـ$ و
يوازي الضلع $ا-ب$ طرحت مثلث $هـ-د-ب$ و يساوى المثلث $ا-د-ب$ لانه
يلزم من توازي المستقيمين $هـ-د$ و $ا-ب$ أن تكون الزاويتان المتناظرتان
 $ا-هـ-د$ و $ا-ب-د$ متساويتين ومن توازي المستقيمين $ا-ب$ و $هـ-د$ و أن
تكون الزاويتان المتناظرتان $هـ-د-ب$ و $ا-د-ب$ متساويتين ومن المعلوم
أن الضلع $ب-د$ = للضلع $ا-د$ بالفرض فيكون المثلث $هـ-د-ب$ =

للمثلث $أ هـ د$ كما ثبت ذلك (في النظرية السابعة)
 ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون $هـ د = أ د$ وحيث أن الشكل
 الرباعي $هـ د و ز$ متوازي الاضلاع يكون $هـ د = ز د$ ويلزم
 من هذا أن يكون $أ د = ز د$ وهو المطلوب
 (وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من تساوى المثلثين $أ هـ د و هـ د و$
 أن يكون $هـ د = ز د$ ومن توازي اضلاع الرباعي $هـ د و ز د$
 أن يكون $هـ د = ز د$ ويلزم من هذا أن يكون $ز د = و د$
 وأن يكون $هـ د = ز د$ وهو المطلوب

* (الدعوى الثامنة والاربعون النظرية شكل من) *
 أى شكل شبيه المنحرف اذا مدت من وسط أحد ضاعيه المنحرفين مستقيماً يوازي
 إحدى القاعدتين المتوازيتين أى الضاعين المتوازيين فاعلم
 أولاً أن هذا المستقيم يمر بوسط الضلع الآخر
 وثانياً أن المستقيم المذكور يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين
 أى أن أى شكل شبيه المنحرف مثل $أ ب د$ اذا مدت من النقطة $و$ التى
 هى وسط ضاعه $د ز$ غير الموازى للضلع $أ ب$ مستقيماً مثل $و هـ$ يوازي
 إحدى القاعدتين المتوازيتين $أ د و ب د$ فاعلم
 أولاً أن المستقيم $و هـ$ يمر بوسط الضلع الآخر $أ ب$ أعنى يكون $أ هـ$
 $= هـ ب$

وثانياً أن المستقيم $و هـ$ يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين
 $أ د و ب د$ أعنى يكون $و هـ = \frac{أ د + ب د}{2}$
 (برهان القضية الاولى) أن يقال لو وصل قطر الشكل مثل $أ ب$ لحدث
 مثلثان $أ د و ب د$ أما الاول وهو $أ د ب$ ففيه $د و = و ب$ بافرض
 $و د$ يوازي $أ ب$ كذلك فيلزم أن يكون $أ ب = ب د$ وأن يكون
 $و د = \frac{أ ب}{2}$ وأما الثانى وهو $أ د ب$ ففيه $أ ب = ب د$ و $و د = ب د$
 يوازي $ب د$ فيلزم أن يكون $أ ب = ب د$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من كون $\angle ع = \angle ك$ و $\angle ج ه$
 $\angle ز = \angle ع$ أن يكون $\angle ح + \angle ه = \angle ك + \angle ز$ أي $\angle و ه =$
 $\angle ز + \angle ح$ وهو المطلوب

• (الدعوى التاسعة والأربعون النظرية شكل مو) •
 المستقيم المار بوسطى ضلعي مثلث يوازي ضلعه الثالث أي أن المستقيم $ه ه$
 المار بوسطى الضلعين $ا ح$ و $ا ب$ من المثلث $ا ح ب$ يوازي ضلعه
 الثالث $ح ب$

(برهانه) أن يقال لو مذهب النقطة $ه ه$ مستقيم $ه ه$ يوازي $ا ب$
 لحدث مثلث $ه ح و =$ المثلث $ا ه د$ لان $\angle ج ه = \angle ا ه ا$ بالفرض
 والزاوية $ح ه و =$ للزاوية $ا$ بالتناظر و $ه و = ا د$ كما تقدم
 وقد ثبت في النظرية السادسة أن المثلثين اللذين بهما المنة متساويان ويلزم
 من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية $ح =$ للزاوية $ا ه د$ ويلزم
 من كونهما متناظرين ومتساويتين أن يكون المستقيمان $ه د$ و $و ه$ $س$
 متوازيين وهو المطلوب

• (الدعوى الخمسون النظرية شكل من) •

أي شكل شبيه المنحرف المستقيم المار بوسطى ضلعيه المنحرفين يوازي كلا من
 قاعدتيه المتوازيين

أي أن أي شكل شبيه المنحرف مثل $ا ب ح د$ المستقيم $ه ه$ المار
 بوسطى ضلعيه غير المتوازيين $ا ب$ و $د ح$ يوازي كلا من قاعدتيه
 المتوازيين $ا د$ و $ح ب$

(برهانه) أن يقال لو وصل احد قطري الشكل مثل $د ب$ ونصفه بنقطة
 مثل $ع$ ومذهبها مستقيم يوازي كلا من القاعدتين المتوازيين $ا د$ و $ح ب$
 لمر بوسطى الضلعين $ا ب$ و $د ح$

وينتج من هذه النظرية

أولا أن المستقيم المار بوسطى ضلعي شبيه المنحرف غير المتوازيين يمر أيضا

وسطى قطريه ويكون مساويا لنصف مجموع قاعدتيه المتوازيين
وثانياً أن المستقيم المحصور بين وسطى قطريه يكون مساويا لنصف فاصل
قاعدتيه المتوازيين انظر (شكل ح)

لانه لو وصل المستقيم د ط ومد على استقامته جهة ط حتى لاقى حـ
في ط حيث مثلث د ح ط فيه و ط يوازي ا ح ط حتى لاقى حـ
و ح فيكون و ط = ح ط وحيث ان و ط = ا ح فيكون ح ط =
ا ح او ح ط = ا د وحيث ان ح ط = ح ط - د ط = ح ط - ح ط
يكون ح ط = ح ط - ح ط = ا د

ويلزم من كون ح ط موازيا للضلع ح ط و ح ط = ح ط - ح ط
يكون ح ط = ح ط فاذن يكون
ح ط = ح ط - ح ط وهو المطلوب

(الدعوى الحادية والخمسون النظرية شكل د)

الشكل الرباعي يكون متوازي الاضلاع اذا كانت زواياه المتقابلة
متساوية

أي ان الشكل الرباعي مثل ا ب ح د يكون متوازي الاضلاع اذا كانت
زواياه المتقابلة ا و ح و ب و د متساوية
(برهانه) أن يقال حيث ان مجموع الزوايا الداخلة من أي شكل رباعي
محتب يساوي أربع قوائم يكون

$$1 + 2 + 3 + 4 = 4 \text{ قوائم وحيث ان}$$

$$1 = 2 \text{ بالفرض و } 2 = 3 \text{ كذلك يكون}$$

$$2 + 3 + 4 = 4 \text{ قوائم ويلزم من هذا أن يكون}$$

$$1 + 2 = 4 \text{ لقائمتين وحيث كان مجموع المتجاورتين الداخلتين حـ}$$

$$و ب مساويا لقائمتين يكون المستقيمان ا ب و ح د متوازيين ويمثل$$

$$\text{هذا يبرهن على أن ا د و ح ط متوازيان وهو المطلوب}$$

نتم المقالة الاولى بحمد الله وعونه

• (المقالة الثانية) •

• (في بيان الدائرة ومقادير الزوايا) •

(حدود)

(حد ١) (شكل ٤٦) محيط الدائرة خط منحني بجميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا

والدائرة سطح مستو ومحاط بهذا الخط المنحني

(حد ٢) نصف القطر مستقيم ممتد من المركز الى المحيط مثاله $ا - ب$ من (الشكل ٤٦)

والقطر مستقيم يمر بالمركز وينتهي بنقطتين من المحيط مثاله $ا - ب$ من (الشكل ٤٦) وبقتنئى تعريف محيط الدائرة تكون أنصاف الاقطار كلها متساوية وكذلك الاقطار وينتج من تعريف محيط الدائرة أن النقطة التي يكون بعدها عن المركز اكبر من نصف القطر تكون خارجة عن المحيط والتي بعدها عن المركز أصغر من نصف القطر تكون داخل الدائرة .

(حد ٣) القوس جزء من المحيط مثاله $و ح ر$ من (الشكل ٤٦) والوتر مستقيم ينتهى بطرفى القوس مثاله $و ر$ من (الشكل ٤٦)

(حد ٤) قطعة الدائرة جزء منها محاط بقوس ووتر مثاله القطعة $و ح ر$ أو القطعة $ا ه د - ر$ من (الشكل ٤٦)

• (تنبيه) •

اعلم أن الوتر مثل $و ر$ انما ينسب عند الاطلاق للقوس الاصغر وان كان موافقا للقوسين والقطعتين الكبرى والصغرى

(حد ٥) قطع الدائرة جزء من الدائرة محاط بقوس ونصف قطر ين واصلين الى نهايتى ذلك القوس مثاله $ا ح ه$ أو $ه د ح$ أو $د ح س$ من (الشكل ٤٦)

(حد ٦) (شكل ٤٧) المستقيم الداخلى ما كان مرسوما داخل الدائرة ومنتهيا بنقطتين من محيطها مثاله المستقيم $ا - ب$ من (الشكل ٤٧)

الزاوية الداخلية زاوية رأسها بالمحيط وضلعاهما وتران مثالها الزاوية α من (الشكل ٤٧)

المثلث الداخلي مثلث رأسه بالمحيط مثالها المثلث α من (الشكل ٤٧) ويقال للدائرة حينئذ خارجية بمعنى انها مرسومة عليه كثير الاضلاع الداخلي شكل رأسه بالمحيط ويقال للدائرة حينئذ خارجية بانعنى المتقدم

(حد ٧) القاطع مستقيم يقطع محيط الدائرة في نقطتين مثالها المستقيم α من (الشكل ٤٨)

(حد ٨) المستقيم المماس لمحيط الدائرة هو مستقيم لا يشترك مع المحيط الا في نقطة واحدة مثالها المستقيم α من (الشكل ٤٨) ونقطة التماس هي نقطة الاشتراك مثالها α

(حد ٩) الدائرتان المتماستان دائرتان لا يتشارك محيطاهما الا في نقطة واحدة

(حد ١٠) كثير الاضلاع الخارجي ما كانت جميع اضلاعه مماسة للمحيط مثالها α من (الشكل ١٦٠) وحينئذ يقال للدائرة داخلية بمعنى انها مرسومة داخله

*** (دعوى) ***

*** (الدعوى الاولى النظرية شكل ٤٩) ***

كل قطر ينصف الدائرة والمحيط

أي ان كل قطر مثل α - يقسم الدائرة والمحيط الى جزئين متساويين (برهانها) أن يقال لو جعل القطر α - فصلا مشتركا وطبق الشكل α هـ - على الشكل α و - لانطبق الخط المنحني α هـ - على الخط المنحني α و - انطبقا كلياً والا لكان في أحدهما نقطتا بعداهما عن المركز غير متساوية وهذا يخالف تعريف محيط الدائرة

*** (تنبيه) ***

بشكل

كل مستقيم قسم المحيط الى جزئين متساويين يكون قطرا أى ان كل مستقيم
مثل a - يقسم المحيط a م - b في النقطتين a و b الى جزئين
متساويين يكون قطرا

(برهانها) أن يقال لو لم يكن a - قطرا لكان مركز المحيط كالنقطة o
مثلا خارجا عنه ويلزم منه أن يكون المستقيم a و b متلاهما والقطر ويلزم
من كونه قطرا أن يكون a م b نصف المحيط ويلزم منه أن يكون الجزء
 a م b مساويا للكل a م b - وهو محال فيلزم أن يكون
المركز على المستقيم a - أى ان a - هو القطر وهو المطلوب انظر
(شكل ٤٩ الثانى)

* (الدعوى الثانية النظرية شكل ٤٩) *

كل وتر أصغر من القطر

أى ان كل وتر مثل a د فهو أصغر من القطر

(برهانها) أن يقال لو وصل من نهايتى الوتر a د نصفا قطر ين a د و b د
حدث مثلث a د b أى ضلع من اضلاعه أصغر من مجموع الضلعين
الآخرين

ومن المعلوم أن أحد اضلاعه هو الوتر وهو أصغر من مجموع نصفي القطرين
وهذا المجموع يساوى قطرا كاملا فينبئ ذلك أن يكون الوتر أصغر من القطر

* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية أن أكبر خط مستقيم يمكن رسمه في الدائرة يساوى قطرها

* (الدعوى الثالثة النظرية شكل ٣ من ٢) *

أى مستقيم قاطع لا يمكن أن يتقطع محيط الدائرة فى أكثر من نقطتين

(برهانها) أن يقال لو فرض أن مستقيما مثل a - b يتقطع محيطا كان
مركزه o في ثلاث نقط مثل a و b و c لا يمكن توصيل أنصاف
اقطار مثل ao و bo و co ولو فرض أن النقطة o هي وسط الوتر
 a - والنقطة o وسط الوتر b - يتم وصل o و o لازم أن يكون

وم عودا على ا - و وم عودا على - لان كلا من المثلثين
الحادئين ا د - و - و ح متساوي الساقين ويلزم من هذا امكان تنزيل
عمودين وم و وم على المستقيم م - ص وهو محال
* (الدعوى الرابعة النظرية شكل ٥٠) *

الاقواس المتساوية أوتارها متساوية والاقواس المتساوية أقواسها متساوية
سواء كان ذلك في دائرة واحدة أو دوائر متساوية والدوائر المتساوية
ما كانت أنصاف أقطارها متساوية

أي إذا كان القوس ا ط د مساويا للقوس هـ ع هـ يكون الوتر ا د
مساويا للوتر هـ ع وبالعكس أي إذا كان الوتر ا د مساويا للوتر هـ ع
يكون القوس ا ط د مساويا للقوس هـ ع هـ

(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من كون القطر ا - مساويا للقطر
هـ و أن يمكن تطبيق نصف الدائرة ا ط د - على نصف الدائرة
هـ ع هـ ويلزم من هذا أن يتحد الخط المنحني ا ط د - بالخط المنحني
هـ ع هـ واتحادا كلياً وحيث ان الجزء ا ط د مساو للجزء هـ ع هـ
بالفرض تقع النقطة د على النقطة ع فاذن يكون الوتر ا د مساويا
للوتر هـ ع وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو وصل نصف القطرين د و ر ح
لحدث مثلثان ا د و هـ ر ح اضلاعهما المتناظرة متساوية أعني ا د
= هـ ر و د = ر ح و ا د = هـ ع ويلزم من هذا أن يكونا
متساويين ويلزم من تساويهما أن تكون الزاوية ا د مساوية للزاوية
هـ ر ح فلو طبق نصف الدائرة ا د - على مساويه هـ ع ووقع نصف
القطر د على نصف القطر ر ح لان الزاوية ا د = هـ ر ح
ووقعت النقطة د على النقطة ع فاذن يكون القوس ا ط د مساويا
لقوس هـ ع هـ وهو المطلوب

* (الدعوى الخامسة النظرية شكل ٥٠٠) *

القوس الأكبر من آخر في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية وتره أكبر من وتر الآخر

والوتر الأكبر كذلك قوسه أكبر بشرط أن لا يزيدا أكبر القوسين عن نصف المحيط

أي إذا كان القوس مثل $\alpha \beta \gamma$ أكبر من آخر مثل $\delta \epsilon \zeta$ يكون الوتر $\alpha \delta$ أكبر من الوتر $\gamma \zeta$

وإذا كان الوتر $\alpha \delta$ أكبر من الوتر $\gamma \zeta$ يكون القوس $\alpha \beta \gamma$ أكبر من القوس $\delta \epsilon \zeta$

(برهان القضية الأولى) أن يقال لو أخذ مثل قوس $\alpha \beta \gamma$ مساو للقوس $\delta \epsilon \zeta$ لكان الوتر $\alpha \delta$ مساوياً للوتر $\gamma \zeta$ فإذا وصل نصف القطرين

$\alpha \delta$ و $\gamma \zeta$ حدث مثلثان $\alpha \delta \gamma$ و $\delta \epsilon \zeta$ فيهما $\alpha \delta = \delta \epsilon$ مشترك

$\gamma \zeta = \delta \epsilon$ والزوايا $\alpha \delta \gamma = \delta \epsilon \zeta$ أكبر من الزاوية $\alpha \delta \gamma$ فاذن يكون الضلع $\alpha \delta$ أكبر من الضلع $\delta \epsilon$

وحيث أن $\alpha \delta = \gamma \zeta$ يكون $\alpha \delta$ أكبر من $\delta \epsilon$ وهو المطلوب (وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو لم يكن القوس $\alpha \beta \gamma$ أكبر من القوس $\delta \epsilon \zeta$ لكان إما مساوياً له أو أصغر منه فان كان مساوياً له كان الوتر $\alpha \delta$ مساوياً للوتر $\gamma \zeta$ وان كان أصغر منه كان الوتر $\alpha \delta$ أصغر من الوتر $\gamma \zeta$ وكلاهما مخالف للفروض فاذن يكون القوس $\alpha \beta \gamma$ أكبر من القوس $\delta \epsilon \zeta$ وهو المطلوب

• (تنبيه) •

اعلم انه اذا كان كل من القوسين أكبر من نصف المحيط كان وتر القوس الأكبر أصغر وما هو مرسوم في (الشكل ٥٠) يوضح ذلك فان فيه القوس $\alpha \beta \gamma$ أكبر من القوس $\delta \epsilon \zeta$ والوتر $\alpha \delta$ أصغر من الوتر $\gamma \zeta$

• (الدعوى السادسة النظرية شكل ٥١) •

القطر العمود على وتر ينصفه وقوسه

أي ان القطر مثل $ح$ $ر$ العمود على قوس مثل $ا$ $ب$ ينصفه بأوسه $ا$ $ر$ $ب$
 أعني يكون $ا$ $ر$ $=$ $ر$ $ب$ والقوس $ا$ $ر$ $=$ للقوس $ر$ $ب$

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو وصل نصف القطرين $ا$ $ر$ $ب$ و $ا$ $ر$ $ب$
 لكان المثلث $ا$ $ر$ $ب$ متساوي الساقين لان نصف القطر $ا$ $ر$ $ب$ $=$ $ر$ $ب$
 وقد تقدم في النظرية الثمانية عشر من المقالة الاولى أن العمود النازل من
 رأس المثلث المتساوي الساقين على قاعدته ينصفها المقدم ثبت بهذا أن العمود
 $ا$ $ر$ $ب$ $=$ $ر$ $ب$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو وصل الوزان $ا$ $ر$ $ب$ و $ا$ $ر$ $ب$ لكانا
 متساويين لانه يلزم من كون $ر$ $د$ عمودا على $ا$ $ب$ والبعد $ا$ $د$ $=$ $د$ $ب$
 أن يكون المائل $ا$ $ر$ $ب$ $=$ $ر$ $ب$ ويلزم من كون الوزان $ا$ $ر$ $ب$ $=$ $ر$ $ب$ أنه
 يكون القوس $ا$ $ر$ $=$ للقوس $ر$ $ب$ وهو المطلوب

• (تنبيه) •

اعلم أن المستقيم $ح$ $ر$ المار بالمركز $ر$ وبوسط الوتر $ا$ $ب$ وبوسط القوس
 $ا$ $ر$ $ب$ يكون عمودا على الوتر المذكور وحيث ان شرطين من هذه الشروط
 يكفيان لتحديد وضع مستقيم يعلم من ذلك أن كل مستقيم وجد فيه شرطان
 من هذه الشروط لا بد وأن يوجد فيه الشرطان الآخران فثبت هذا العمود
 المقام على وسط الوتر يمر بالمركز وبوسط القوس المؤثر به والمستقيم المار بالمركز
 وبوسط القوس يكون عمودا على وسط وتر ذلك القوس وهكذا

• (الدعوى السابعة النظرية شكل ٥٢ الثاني) •

كل ثلاث نقط ليست على مستقيم يمكن أن يمر بها محيط دائرة لا اثنان
 أي أن كل ثلاث نقط مثل $ا$ $ر$ $ب$ و $ح$ ليست على مستقيم يمكن أن يمر
 بها محيط دائرة لا محيطان

(برهانها) أن يقال لو وصل المستقيمان $ا$ $ر$ $ب$ و $ا$ $ر$ $ب$ ونصف المستقيم $ا$ $ر$ $ب$
 بنقطة مثل $د$ ونصف المستقيم $ا$ $ر$ $ب$ بنقطة مثل $ح$ وأقيم $د$ $د$ عمودا
 على $ا$ $ر$ $ب$ وأقيم $ح$ $ح$ عمودا على $ا$ $ر$ $ب$ لالتقي العمودان $د$ $ح$ و $ح$ $ط$

لأنه قد تقرر في النظرية الخامسة والثلاثين من المقالة الأولى أن العمود المقام على أحد مستقيمين متلاقين يتلاقى بالعمود المقام على المستقيم الآخر ولتبرهن على أن نقطة تقاطع العمودين هي المركز فنقول حيث كانت نقطة التقاطع نقطة من نقط العمود $د ه$ يكون بعدها عن النقطة $د$ كبعدها عن النقطة $ه$ ولكونها أيضا من نقط العمود $د ه$ يكون بعدها عن النقطة $ه$ كبعدها عن النقطة $د$ فينتهز المحيط الذي مركزه نقطة التقاطع $ط$ ونصف قطره $ط د$ يمر بالنقط الثلاث $ا ب و$ وهو المطلوب فقد ثبت بهذا أن كل ثلاث نقط ليست على مستقيم $د ه$ يمكن أن يمر بها محيط دائرة

ولبيان عدم إمكان مرور محيط آخر بالنقط المذكورة يقال لو أمكن أن يمر محيط آخر بالنقط المذكورة للزم أن يكون مركزه على العمود $د ه$ لأنه لو كان خارجا عن العمود $د ه$ لكان البعدان الواصلان منه إلى النقطتين $د ه$ غير متساويين وهذا يلزم أن يكون المركز على العمود $د ه$ فينتهز يكون المركز على كلا العمودين $د ه و د ه$ وحيث أنه لا يمكن أن يتقاطع الخطان المستقيمان إلا في نقطة واحدة يلزم أن يكون المركز واحدا وأن يتحدد المحيطان وهو المطلوب

• (نتيجة) •

ينتج من هذه النظرية أن المحيطين لا يمكن أن يتقاطعا في أكثر من نقطتين لأنه لو وجد لهما ثلاث نقط مشتركة لاحتد المركز فيهما وحينئذ لا يتكون منهما الا محيط واحد فقط

• (الدعوى الثامنة النظرية شكل ٥٣) •

الوتران المتساويان بعداهما عن المركز - تساويان والوتران غير المتساويين أصغرهما أبعداهما عن المركز

أي أن الوترين المتساويين مثل $ا ب و د ه$ بعداهما عن المركز $و د ه$ متساويان وإن الوترين غير المتساويين مثل $ا ب و ا ج$ أصغرهما

أبعدهما عن المركز

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو نصف الوتر a بالعمود e و $و$ والوتر e بالعمود $و$ ووصل نصف القطرين a و $و$ لحدث مثلثان قائما الزاوية $و$ و $و$ مساويان لان الوتر $a = و$ والضلع $ا$ الذي هو نصف الوتر a يساوى الضلع $و$ الذي هو نصف الوتر $و$ ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون الضلع $و$ مساويا للضلع $و$ وهو المطلوب فقد ثبت بهذا أن الوترين المتساويين يبعدهما عن المركز متساويان

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن الوتر $ا$ ح أكبر من الوتر $د$ ه فيكون القوس $ا$ ع ح أكبر من القوس $د$ ك ه

فلو أخذ من القوس $ا$ ع ح الجزء $ا$ ع = د ك ه ووصل الوتر $ا$ و أنزل العمود $و$ على الوتر $ا$ والعمود $ط$ على الوتر $د$ لظهر أن $و$ أكبر من $ط$ وحيث ان المائل $و$ م أكبر من العمود $ط$ يكون $و$ أكبر من $ط$ وحيث ان $و = و$ لان الوتر $ا = د$ يكون $و$ أكبر من $ط$ فقد ثبت بهذا ان الوترين غير المتساويين أصغرهما يبعدهما عن المركز وهو المطلوب

• (الدعوى التاسعة النظرية شكل ٥٤) •

العمود المقام على نهاية نصف قطر يكون مماسا لمحيط الدائرة في النهاية المذكورة ونصف القطر المارة بنقطة تماس مستقيم مماس يكون عمودا على الخط المماس

أي ان العمود $د$ المقام على نهاية نصف قطر مثل $ا$ يكون مماسا لمحيط الدائرة في النقطة $ا$ وان نصف القطر $ا$ المارة بنقطة التماس $ا$ يكون عمودا على الخط المماس $د$

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو أخذ على المستقيم $ب$ د نقطة مثل $ه$

غير النقطة α ووصل α β لكان $\alpha\beta$ مائلا على $\gamma\delta$ ويلزم من
هذا أن يكون $\alpha\beta$ أكبر من نصف القطر $\alpha\gamma$ وأن تكون النقطة β
خارجة عن المحيط فينبذ لا يوجد من المستقيم $\gamma\delta$ نقطة مشتركة مع
المحيط الا النقطة α فهو مماس للمحيط في النقطة α

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن المستقيم $\gamma\delta$ مماسا للمحيط
في النقطة α فيلزم أن تكون أي نقطة من نقطه ماعدا النقطة α خارجة
عن المحيط فينبذ اذا وصل من المركز γ الى احدى نقط المستقيم $\gamma\delta$
غير النقطة α مستقيم مثل $\gamma\beta$ يكون $\alpha > \beta$ ويلزم من هذا
أن يكون $\alpha\beta$ عمودا على $\gamma\delta$ وهو المطلوب
ما ينتج من هذه النظرية

ينتج منها أولا انه لا يمكن من نقطة موضوعة على محيط دائرة أن يمتد المستقيم
واحد مماس لانه لو أمكن أن يمتد منها مماسان للزم أن يكون كلاهما عمودا على
نهاية نصف القطر المار بنقطة التماس ويلزم من هذا امكان اقامة عمودين على
مستقيم واحد من نقطة واحدة وقد تقدم انه محال فينبذ لا يمكن أن يمتد
من النقطة الموضوعة على المحيط الا مماس واحد وهو المطلوب

وثانيا أن العمود المقام من نقطة التماس على الخط المماس يمر بالمركز
وثالثا أن العمود المنزل من المركز على الخط المماس يمر بنقطة التماس
ورابعا أن المستقيمين المماسين الممتدين من نهايتي قطر دائرة متوازيان
لان كلاهما عمود على القطر المذكور

وخامسا أن المستقيمين المماسين اذا كانا متوازيين يكون الوتر الواصل بين
نقطتي تماسهما بالمحيط قطرا لان القطر العمود على أحد المماسين يمسكون
أيضا عمودا على الآخر فاذن يمر بنقطتي التماس

وسادسا أن المستقيمين المماسين لمحيط دائرة والمارين بنهايتي وتر غير القطر
يلتقيان

وسابعا اذا تقاطع مستقيمان مماسان لا يكون المستقيم المار بنقطتي

التماس قطرا

• (الدعوى العاشرة النظرية شكل ٥٥ و ٥٦) •

القوسان المنحصران من المحيط بين مستقيمين متوازيين متساويين
أى ان القوسين مثل ط ك و ع ل المنحصرين من المحيط بين مستقيمين
متوازيين مثل ا ب و د ه متساويان
ولهذه الدعوى ثلاث حالات

الاولى أن يكون المستقيمان المتوازيان قاطعين للمحيط فحينئذ يرسم نصف
القطر ح ج وعمودا على الوتر ط ع فيكون أيضا عمودا على موازيه
ك ل فاذن تكون النقطة ح وسط كل من القوسين ط ع و ك ع ل
ويلزم من هذا أن يكون القوس ط ع = للقوس ح ع والقوس
ك ع = للقوس ح ل وحيث ان الاشياء المتساوية اذا طرحت منها
أشياء متساوية كانت البواقي متساوية يكون
ط ح = ك ع = ح ع = ح ل أى ان القوس ط ك = ل ع
وهو المطلوب

الثانية أن يكون أحد المتوازيين قاطعا والاخر مماسا كما في (الشكل ٥٦)
فيرصّل بين المركز ونقطة التماس ح ج بنصف القطر ح ج فيكون عمودا
على المماس د ه وعلى موازيه ط ع ويلزم من هذا أن تكون النقطة
ح وسط القوس ط ع وهو المطلوب

الثالثة أن يكون المستقيمان المتوازيان مماسين للمحيط كما في (الشكل ٥٦)
فيرسم القاطع ا ب موازيا للمماس على ما ذكر في الحالة الثانية يكون القوس
ط ح = ح ع والقوس ط ع = ح ع ويلزم من هذا أن يكون
القوس ح ط ع = للقوس ح ع وهو المطلوب

• (تنبيه) •

اذا فصل المستقيمان من المحيط قوسين متساويين كانا متوازيين ويشترط في
هذا أن يكون كل من القوسين في جهة واحدة بالنسبة لكل من المستقيمين

الفصلين

• (مقدّمتان) •

النقطتان المتماثلتان بالنسبة لمستقيم نقطتان موضوعتان على عمود واحد على هذا المستقيم بعداهما عن موقع العمود متساويتان والمستقيم المذكور يسمى بعمود التماثل

• (الدعوى الحادية عشر النظرية شكل ٩٦ رمز أ) •

إذا كان لمحيطى الدائرتين نقطة مشتركة خارجة عن المستقيم المار بمركزيهما فلا بد وأن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مماثلة للأولى بالنسبة لمستقيم المركزين أى إذا كان لمحيطى الدائرتين نقطة مشتركة مثل أ خارجة عن المستقيم σ المار بمركزيهما σ و σ فلا بد وأن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مثل آ مماثلة للأولى بالنسبة لمستقيم المركزين σ (برهانها) أن يقال حيث كان أ أ عموداً على σ و آ آ عموداً على σ يكون آ σ = أ σ و آ آ = أ آ ويلزم من هذا أن يمر المحيط الذى مركزه σ ونصف قطره آ بالنقطة آ وأن يمر المحيط الذى مركزه σ ونصف قطره آ بالنقطة آ كذلك

ما ينتج من هذه النظرية

ينتج منها أولاً أنه إذا تقاطع محيطادائرتين فالمستقيم المار بمركزيهما يكون عموداً على وسط الوتر المشترك

وثانياً أنه إذا تماس محيطادائرتين فنقطة التماس تكون على المستقيم المار بمركزيهما اذ لو كانت خارجة عنه لازم أن يشترك المحيطان فى النقطة المماثلة لهما ويلزم من هذا تقاطعهما

• (الدعوى الثانية عشر النظرية شكل ٩٦ رمز ب) •

إذا كان محيطادائرتين خارجيتين بعضهما كان البعد بين مركزيهما أكبر

من مجموع نصفي قطريهما

برهانها أن يقال حيث أن $\delta = \alpha + \beta + \gamma$ يكون

$\delta < \alpha + \beta$ وهو المطلوب

• (الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ٥٦ رمز δ) •

إذا كان أحد محيطي الدائرتين داخلا في دائرة المحيط الآخر بدون أن يتلاقيا
كان البعدين مركزيهما أصغر من فاضل نصفي قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون $\delta = \alpha - \beta - \gamma$

أن يكون $\delta > \alpha - \beta$ وهو المطلوب

• (الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ٥٩) •

إذا تماس محيطا دائرتين في الخارج كان البعدين مركزيهما مساويا لمجموع
نصفي قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون نقطة التماس ١ على المستقيم المار

بالمركزين أن يكون $\delta = \alpha + \beta$ وهو المطلوب

• (الدعوى الخامسة عشر النظرية شكل ٦٠) •

إذا تماس محيطا دائرتين في الداخل كان البعدين مركزيهما مساويا لفاضل
نصفي قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون نقطة التماس ٢ على المستقيم المار

بالمركزين أن يكون $\delta = \alpha - \beta$ وهو المطلوب

• (الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ٦٠ الثاني) •

إذا تقاطع محيطا دائرتين كان البعدين مركزيهما أصغر من مجموع نصفي
قطريهما وأكبر من فاضلهما

(برهانها) أن يقال لو وصل بين إحدى نقطتي التقاطع مثل ١ والمركزين δ

بمستقيمين

بمستقيمين يحدث مثلث اضلاعه البعدين المركزين α و β ونصف القطر γ ونصف القطر δ وقد ثبت في المقالة الاولى أن أى ضلع من أى مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما فإذا كان البعدين المركزين أصغر من مجموع نصفي القطرين وأكبر من فاضلهما وهو المطلوب
* (تنبيه) *

اعلم أن لكل من النظرية الثانية عشر والثالثة عشر والرابعة عشر والخامسة عشر والسادسة عشر عكسا صحيحا سهل البرهنة أى إذا كان البعد بين المركزين أصغر من مجموع نصفي القطرين وأكبر من فاضلهما يتقاطع المحيطان لأنهما لولم يتقاطعا لكانا متاخرين أو داخلين أو متماسين في الخارج أو متماسين في الداخل فإن كانا خارجين يلزم أن يكون البعد بين المركزين أكبر من مجموع نصفي القطرين وإن كانا داخلين يلزم أن يكون البعد بين المركزين أصغر من فاضل نصفي القطرين وإن كانا متماسين في الخارج يلزم أن يكون البعد بين المركزين مساويا لمجموع نصفي القطرين وإن كانا متماسين في الداخل يلزم أن يكون بعد المركزين مساويا لفاضل نصفي القطرين وكل ذلك خلاف المفروض فيثبت أنه يتقاطع المحيطان وهو المطلوب

* (الدعوى السابعة عشر النظرية شكل ٦١) *

الزوايا المركزية المتساوية اقواسها متساوية وبالعكس أى الأقواس المتساوية زواياها المركزية متساوية سواء كان ذلك في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية أى إذا كانت الزاوية المركزية α مساوية للزاوية المركزية β يكون القوس α مساويا للقوس β وبالعكس أى إذا كان القوس α مساويا للقوس β تكون الزاوية المركزية α مساوية للزاوية المركزية β

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو طبقت الزاوية α على مساويتها β وقعت النقطة α على النقطة β والنقطة γ على النقطة δ

ويلزم من هذا أن يقع القوس $ا ب$ على القوس $د ه$ فاذن يكونان متساويين وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو لم تكن الزاوية $ا ح د$ مساوية للزاوية $د ح ه$ لكانت إما أكبر منها أو أصغر منها فلو كانت الزاوية $ا ح د$ أكبر من الزاوية $د ح ه$ بأن أخذ من الزاوية الكبرى زاوية مثل $ا ح و$ مساوية للزاوية $د ح ه$ لكان القوس $ا و$ مساويا للقوس $د ه$ بمقتضى ما سبق وقد فرض أن القوس $ا ب$ مساو للقوس $د ه$ فيلزم أن يكون القوس $ا و$ مساويا للقوس $ا ب$ ويلزم من هذا أن يكون الجزء مساويا لكل وهو محال فقد ثبت بهذا أنه لا يمكن أن تكون الزاوية $ا ح د$ أكبر من الزاوية $د ح ه$ وبمثل هذا يبرهن على أنه لا يمكن أن تكون الزاوية $ا ح د$ أصغر من الزاوية $د ح ه$ وبه يثبت أن الزاوية $ا ح د$ مساوية للزاوية $د ح ه$ وهو المطلوب

* (الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ٦٢) *

إذا كانت النسبة بين الزاويتين المركزيتين كالنسبة بين عددين صحيحين كانت النسبة بين قوسيهما مساوية للنسبة المذكورة سواء كان ذلك في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية

أي إذا كانت النسبة بين الزاويتين المركزيتين $ا ح د$ و $د ح ه$ كالنسبة بين عددين صحيحين كانت النسبة بين قوسيهما $ا ب$ و $د ه$ مساوية للنسبة المذكورة أعنى تكون

نسبة الزاوية $ا ح د$: الزاوية $د ح ه$:: القوس $ا ب$: القوس $د ه$ سواء كان ذلك في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية

(برهانها) أن يقال لو جعلت زاوية مثل الزاوية $م$ مقياسا مشتركا وفرض أن الزاوية $ا ح د$ تشتمل على الزاوية $م$ سبع مرات وأن الزاوية $د ح ه$ تشتمل على الزاوية $م$ أربع مرات لكانت الأقواس $ا و$ و $د و$ و $ر ح$ و $ح ط$ و $ط ع$ و $ع ب$ و $ب د$ وكذلك الأقواس $د ل$ و $ل ح$

و د هـ و س هـ متساوية لتساوى الزوايا المركزية ا ح و و ح د
و ر ح و ع ح ط و ط ح و ع ح ك و ك ح و كذلك
الزوايا المركزية د ح و ل ح و د ح و س ح و س ح و يلزم من هذا
أن تكون نسبة القوس الكامل ا ب الى القوس الكامل د هـ كنسبة
٧ الى ٤ وأن تكون

نسبة الزاوية ا ح ب : الزاوية د ح هـ :: القوس ا ب : القوس د هـ
وهو المطلوب

* (تنبيه) *

إذا كانت النسبة بين القوسين ا ب و د هـ كالنسبة بين عددين صحيحين
كانت النسبة بين الزاويتين ا ح ب و د ح هـ كالنسبة بين العددين
المذكورين وحينئذ تكون

نسبة القوس ا ب : القوس د هـ :: الزاوية ا ح ب : الزاوية
د ح هـ لانه يلزم من تساوى القسئ الجزئية ا ح و د ح و ر ح الخ
و د ل و ل ح الخ لتساوى الزوايا الجزئية ا ح و و ح و ر ح الخ
و د ح و ل ح الخ

* (الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل ٦٣) *

النسبة بين الزاويتين المركزيتين تساوى النسبة بين قوسيهما سواء كان ذلك
فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية

أى ان النسبة بين الزاويتين المركزيتين ا ح ب و ا ح د تساوى النسبة
بين قوسيهما ا ب و ا د على أى حالة كانت سواء كان ذلك فى دائرة
واحدة أو فى دوائر متساوية

أى ان نسبة الزاوية ا ح ب : الزاوية ا ح د :: القوس ا ب :
القوس ا د

(برهانها) أن يقال لو لم تكن هذه المتناسبة صحيحة لكان حدها الرابع اما أكبر
من القوس ا د أو أصغر منه فإن كان أكبر من القوس ا د بان كان

مساوياً للقوس أو مثلالكات

نسبة الزاوية $أ ح ب$: الزاوية $أ ح د$:: القوس $أ ب$: القوس $أ و$
فلو تصور أن القوس $أ ب$ مقسوم إلى أقسام متساوية كل منها أصغر من
القوس $د و$ لو قعت إحدى نقط التقاسيم مثل النقطة $هـ$ بين النقطة
 $د$ والنقطة $و$ فلو وصل نصف القطر $ح هـ$ لكانت النسبة بين القوسين
 $أ ب$ و $أ هـ$ كالنسبة بين عددين صحيحين وحينئذ تكون

نسبة الزاوية $أ ح ب$: الزاوية $أ ح هـ$:: القوس $أ ب$: القوس
 $أ هـ$ فلو قورنت هذه المتناسبة بالتناسبة المتقدمة لحدث

نسبة الزاوية $أ ح د$: الزاوية $أ ح هـ$:: القوس $أ و$: القوس
 $أ هـ$ وحيث أن المثلث الأول من هذه المتناسبة أصغر من تاليه يلزم أن يكون
المثلث الثالث أصغر من تاليه ويلزم من هذا أن يكون الكل أصغر من الجزء
وهو محال فقد ثبت بهذا أنه لا يمكن أن تكون

نسبة الزاوية $أ ح ب$: الزاوية $أ ح د$:: القوس $أ ب$: قوس أكبر
من $أ د$ وبمثل هذا يبرهن على أنه لا يمكن أن تكون

نسبة الزاوية $أ ح ب$: الزاوية $أ ح د$:: القوس $أ ب$: قوس أصغر
من القوس $أ د$ فحينئذ تكون

نسبة الزاوية $أ ح ب$: الزاوية $أ ح د$:: القوس $أ ب$: القوس $أ د$
وهو المطلوب

* (في قياس الزوايا) *

قياس الكمية هو البحث عن النسبة بين هذه الكمية والوحدة التي من نوعها فإذا
جعلت الزاوية القائمة وحدة كان مقدار أى زاوية عبارة عن النسبة بين هذه
الزاوية والزاوية القائمة

وحيث تبين من النظرية المتقدمة أنه يمكن إبدال النسبة بين أى زاويتين
مركزيتين بالنسبة بين قوسيهما فلا مانع من مقارنة قوس الزاوية المركزية
بربع المحيط بدل مقارنتها بالزاوية القائمة وهذا معنى قولهم أن الزاوية المركزية

تقاس بالقوس المحصور بين ضلعيها

ولتسهيل هذه المقارنة يقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزءاً متساوية تسمى درجات وكل درجة الى ٦٠ دقيقة وكل دقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا فإذا كان القوس المحصور بين ضامى زاوية مركزية محتوياً على ٢٤ درجة فتقاس هذه الزاوية بكون $\frac{٢٤}{٩}$ أى $\frac{٤}{١٥}$

(تنبيه)

النسبة بين قطعين في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية كالنسبة بين قوسيهما

(الدعوى العشرون النظرية شكل ٦٤ و ٦٥)

كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها

أى ان كل زاوية محيطية مثل الزاوية - ا د تقاس بنصف القوس د ه المحصور بين ضلعيها

(برهانها) أن يقال لو فرض المركز ح واقعا بين ضامى الزاوية - ا د كما في (الشكل ٦٤) ووصل القطر ا ه ونصفا القطرين - ح و ح د ا كانت الزاوية - ح ه الخارجة عن المثلث - ا ح مساوية لمجموع الزاويتين - ا ح و - ا ح وحيث ان الضلع ح ا يساوى الضلع ح د تكون الزاوية - ا ح = للزاوية - ا ح ويلزم من هذا أن تكون الزاوية - ح ه ضعف الزاوية - ا ح وحيث ان الزاوية المركزية - ح ه تقاس بالقوس - ه ه ينتج من ذلك أن الزاوية - ا ح تقاس بنصف القوس - ه ه وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ح ا د تقاس بنصف القوس ه د فينتج من هذا أن الزاوية الكلية - ا د تقاس بنصف القوس الكلى - ه د وهو المطلوب

ولو فرض المركز ح خارجا عن الزاوية - ا د كما في (الشكل ٦٥) ثم وصل القطر ا ه لحدثت زاوية د ا ه قياسها نصف القوس د ه والزاوية - ه ا ه قياسها نصف القوس - ه ه ويلزم من هذا أن تقاس الزاوية - ا د التى هي فاضل الزاويتين - ا ه و د ا ه بنصف فاضل

القوسين ـ هـ و د هـ

فقد ثبت بهذا أن كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها
* (نتائج) *

ينتج من هذه النظرية أولاً أن الزوايا المحيطية مثل ـ ا ح و د هـ الخ
المرسومة في قطعة واحدة متساوية لان نصف القوس ـ و د هـ مقياس لكل
من تلك الزوايا كما في (الشكل ٦٦)

وثانياً أن الزاوية المرسومة في نصف الدائرة مثل الزاوية ـ ا د هـ كما في
(الشكل ٦٧) تكون قائمة لانها تقاس بنصف نصف المحيط ـ و د اى
ربع المحيط

وثالثاً أن الزاوية المرسومة في قطعة أكبر من نصف الدائرة مثل الزاوية
 ـ ا ح من (الشكل ٦٦) تكون حادة لانها تقاس بنصف القوس ـ و د هـ
الاقل من نصف المحيط

ورابعاً أن الزاوية المرسومة في قطعة أصغر من نصف الدائرة مثل الزاوية
 ـ و د من (الشكل ٦٦) تكون منفرجة لانها تقاس بنصف القوس
 ـ ا ح الاكبر من نصف المحيط

* (الدعوى الحادية والعشرون النظرية شكل ٦٩) *

الزاوية الحادة من مماس ووتر تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها
أى ان الزاوية الحادة من مماس ووتر مثل الزاوية ـ ا ح تقاس بنصف
القوس ا م د هـ المحصور بين ضلعيها

(برهانها) أن يوصل القطر ا د المار بنقطة التقاس ا فيكون نصفي
القوس ا م د هـ معياراً للزاوية القائمة ـ ا د ونصف القوس ـ ا ح
معياراً للزاوية المحيطية ـ ا ح ويلزم من هذا أن يكون نصف القوس الكلى
 ا م د هـ معياراً للزاوية الكلية ـ ا ح وهو المطلوب
وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ـ ا هـ تقاس بنصف القوس ا ح المحصور
بين ضلعيها

الدعوى

* (الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل ٦٩ الثاني) *

كل زاوية رأسها بين المركز والمحيط تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها
مضافا اليه نصف القوس المحصور بين امتدادى ضلعيها
أى ان كل زاوية مثل α رأسها بين المركز والمحيط تقاس بنصف القوس
 β المحصور بين ضلعيها مضافا اليه نصف القوس γ المحصور بين
امتدادى ضلعيها

(برهانها) أن يوصل الوتر δ فتكون الزاوية α الخارجة عن
المثلث $\alpha \delta \epsilon$ مساوية لمجموع الزاويتين الداخلتين $\alpha \delta \zeta$ و $\zeta \delta \epsilon$
وحيث ان الزاوية $\alpha \delta \epsilon$ تقاس بنصف القوس β والزاوية $\delta \zeta \epsilon$
تقاس بنصف القوس γ وينتج أن الزاوية α تقاس بنصف القوس
 $\beta \gamma$ مضافا اليه نصف القوس γ وهو المطلوب

* (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل ٦٩ الثالث) *

كل زاوية رأسها خارجة عن المحيط تقاس بنصف القوس المقعرت نحو رأسها
المحصور بين ضلعيها مطروحا منه نصف القوس المحدث المحصور كذلك بينهما
أى ان كل زاوية رأسها خارجة عن المحيط مثل الزاوية α تقاس بنصف
القوس β المقعرت نحو رأسها المحصور بين ضلعيها مطروحا منه نصف
القوس γ المحدث المحصور كذلك بينهما

(برهانها) أن يوصل الوتر δ فتكون الزاوية $\alpha = \delta \zeta \epsilon$
 α وحيث ان الزاوية $\delta \zeta \epsilon$ تقاس بنصف القوس β والزاوية
 $\delta \zeta \epsilon$ تقاس بنصف القوس γ ينتج أن الزاوية α تقاس بنصف
القوس $\beta - \gamma$ نصف القوس $\beta \gamma$ وهو المطلوب

* (تنبيه) *

إذا كان أحد ضلعي الزاوية قاطعا والآخر مماسا أو كلاهما مماسا المحيط
الدائرة فلا تزال هذه النظرية صحيحة والبرهان واحد

* (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ٦٨) *

الزاويتان المتقابلتان من كل شكل رباعي داخلي ممتتان لبعدهما
 أى ان مجموع الزاويتين المتقابلتين مثل $\angle \text{و د}$ من كل شكل رباعي
 داخلي مثل $\angle \text{ا ح د}$ يساوى قائمتين لان الزاوية $\angle \text{ب}$ تقاس بنصف القوس
 ا د ح والزاوية $\angle \text{د}$ تقاس بنصف القوس ا ح د فيكون نصف المحيط
 مقياسا لمجموع الزاويتين $\angle \text{و د}$ فاذن يكون مجموعهما مساويا لقائمتين
 وهو المطلوب

وبالعكس اذا وجد في شكل رباعي مثل $\angle \text{ا ح د}$ زاويتان متقابلتان ممتتان
 لبعدهما كان ذلك الشكل قابلا للرسم في الدائرة
 لانه لو مرر محيط دائرة بالنقط الثلاث ا د ح لكان نصف القوس ا م ح
 معيارا للزاوية $\angle \text{د}$ ويلزم من هذا أن يكون نصف القوس ا د ح معيارا
 للزاوية $\angle \text{ب}$ المتممة للزاوية $\angle \text{د}$ وهذا لا يتناقض الا اذا كانت الزاوية $\angle \text{ب}$
 محيطية وهو المطلوب

* (في الدعوى العملية المتعلقة بالمقالة الاولى والثانية) *

* (الدعوى الاولى العملية شكل ٧٠) *

اذا كان المطلوب تنصيف مستقيم محدود مثل المستقيم ا ب فطريقة ذلك
 أن تؤخذ نقطة بالبيكار ا ح ك يمر من نصف الخط ا ب ويركز في النقطة ا
 ويرسم قوسان أحدهما فوق الخط والآخر تحته ثم يركز في النقطة ب
 ويرسم قوسان كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين اللذين فوق
 الخط ونقطة تقاطع القوسين اللذين تحته فهذا المستقيم يكون عمودا على
 وسط المستقيم المعلوم والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل ا د و د ب
 و ه ه ا لكان الشكل الحادث معيننا وقد تقرّر في المقالة الاولى
 أن قطري المعين ينصفان بعضهما عمادا فقد ثبت به هذا أن البعد ا ح =
 البعد ح ب

* (تأنيبه) *

هذه العملية تستعمل لاقامة عمود على وسط مستقيم محدود

الدعوى

• (الدعوى الثانية العملية شكل ٧١) •

إذا كان المطلوب إقامة عمود على مستقيم من نقطة معينة عليه فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم α - والنقطة المعينة عليه α ثم يؤخذ من المستقيم α - نقطة مثل α على عين النقطة α ونقطة أخرى مثل β - على يسارها بحيث يكون البعد $\alpha\beta =$ للبعد $\alpha\gamma$ ثم تؤخذ قطعة بالبيكارا كبر من α ويركز في النقطة α ويرسم قوس دائرة فوق الخط α - أو فتحته ثم يركز في النقطة β ويرسم قوس دائرة كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين والنقطة المعينة α فهذا المستقيم يكون هو العمود المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية أنه لو وصل α و β و γ - لحدث مثلث متساوي الساقين وقد تقرر في المقالة الاولى أن المستقيم المار من رأس المثلث المتساوي الساقين الى وسط قاعدته يكون عمودا عليها

• (تنبيه) •

إذا علم مستقيم مثل α - ونقطة معينة عليه مثل α وكان المطلوب أن يمتد من النقطة α مستقيم يصنع مع المستقيم المعلوم α - زاوية قائمة تعمل العملية المتقدمة بعينها

• (الدعوى الثالثة العملية شكل ٧٢ الثاني) •

إذا كان المطلوب انزال عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم α - والنقطة المعلوم α - ويؤخذ على α - نقطتان مثل α و β ثم تؤخذ قطعة بالبيكارا بقدر $\alpha\beta$ ويركز في النقطة α ويرسم محيط دائرة ثم تؤخذ قطعة بالبيكارا بقدر $\alpha\beta$ ويركز في النقطة β ويرسم محيط دائرة فيتقاطع المحيطان في النقطة γ - وفي نقطة أخرى مثل δ - ثم يوصل مستقيم بين نقطتي التقاطع فيكون هو العمود المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية أن المستقيم $\alpha\gamma$ المار بالمركزين α و β

عمود على وسط الوتر المشترك ان وقد تقر في المقالة الاولى انه اذا كان
أحد مستقيمين عمودا على آخر كان الآخر عمودا عليه

• (الدعوى الرابعة العمالية شكل ٧٣) •

اذا علمت نقطة على مستقيم معلوم وكان المطلوب متى مستقيم من باب صنع مع
المستقيم المعلوم زاوية تساوى زاوية معلومة فطريقة ذلك أن تفرض
النقطة المعلومه A والمستقيم المعلوم AB والزاوية المعلومه C فيركز
في رأس الزاوية C وتؤخذ قوسه بالبيكار بقدر ما يراد ويرسم قوس
مثل E ينتهي بضامى الزاوية ثم يركز في النقطة A ويرسم قوسه
غير محدود مثل D وتؤخذ قوسه بالبيكار بقدر الوتر ED ويركز
في النقطة D ويرسم قوس يقطع القوس غير المحدود D في نقطة مثل
 F ثم يوصل AF فتكون الزاوية الحادثة FAB مساوية للزاوية
المعلومه C

والدليل على صحة هذه العملية أن نصف القطر $AB = AC$ والوتر
 $ED = EF$ فيلزم أن يكون القوس ED مساويا للقوس EF
ويلزم من هذا أن تكون الزاوية $FAB = C$ لـ C

• (الدعوى الخامسة العملية شكل ٧٤) •

اذا كان المطلوب تنصيف قوس معلوم أو زاوية مفروضة فطريقة تنصيف
القوس المعلوم كالقوس AB أن يوصل الوتر AB ثم تؤخذ قوسه بالبيكار
أكبر من نصف الوتر AB ويركز في النقطة A ويرسم قوسا AC AD
فوق الوتر والآخر تحته ثم يركز في النقطة B ويرسم قوسا كذلك ثم يوصل
مستقيمين بين نقطة تقاطع القوسين اللذين فوق الوتر ونقطة تقاطع القوسين
اللذين تحته فهذا المستقيم يكون عمودا على وسط الوتر AB ومنصفا
للقوس AB

وطريقة تنصيف الزاوية المعلومه كالزاوية ABC أن يركز في النقطة B
وتؤخذ قوسه بالبيكار بقدر ما يراد ويرسم قوس مثل DE ينتهي بضامى

الزاوية ثم يقام عمود على وسط الوتر $ا ب$ فهذا العمود ينصف الزاوية $ا ب$

*** (نبيهه) ***

يمكن بالطريقة المتقدمة أن يقسم القوس المعلوم أو الزاوية المعلوم إلى أربعة أجزاء متساوية أو ثمانية أو ستة عشر وهكذا .

*** (الدعوى السادسة العملية شكل ٧٥) ***

إذا علم مستقيم ونقطة خارجة عنه وكان المطلوب مده مستقيم يمر بالنقطة المعلومه ويوازي المستقيم المعلوم فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم $ا ب$ والنقطة المعلومه $ا$ وتؤخذ نقطة من المستقيم المعلوم كالنقطة $هـ$ ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر البعد $ا هـ$ ويركز في النقطة $ا$ ويرسم القوس غير المحدود $هـ و$ ثم يركز في النقطة $هـ$ ويرسم القوس $ا ب$ ويؤخذ $هـ د = ا ب$ ثم يوصل المستقيم $ا د$ فيكون هو الموازي المطلوب والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل المستقيم $ا هـ$ لظهر أن الزاويتين المتبادلتين الداخلتين $ا هـ و$ و $هـ ا د$ متساويتان ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان $ا ب$ و $ا د$ متوازيين

*** (الدعوى السابعة العملية شكل ٧٦) ***

إذا علم زاويتان من مثلث وكان المطلوب إيجاد الزاوية الثالثة فطريقة ذلك أن يفرض $ا$ إحدى الزاويتين المعلومتين و $ب$ الزاوية الأخرى ويرسم المستقيم غير المحدود $د هـ و$ ثم تنشأ في النقطة $هـ$ زاوية $د هـ ح$ $= ا$ وزاوية $ح هـ ب = ب$ فالزاوية الباقية $ح هـ و$ تكون الزاوية الثالثة المطلوبة لان مجموع هذه الزوايا الثلاث يساوي قائمتين

*** (الدعوى الثامنة العملية شكل ٧٧) ***

إذا علم من مثلث ضلعان والزاوية المنحصرة بينهما وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك أن يفرض $ب$ أحد الضلعين المعلومين و $ح$ الضلع الآخر و $ا$ الزاوية المنحصرة بينهما ويرسم المستقيم غير المحدود $د هـ$ ثم تنشأ في

النقطة د زاوية هـ د و تساوى الزاوية المعلومه ا ثم يؤخذ
 د ع = ب و د ح = و ثم يوصل ع ح فيكون د ع ح هو
 المثلث المطلوب

(الدعوى التاسعة العملية شكل ٧٨)

أذا علم من مثلث ضلع وزاويتان وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك
 أن يقال ان الزاويتين المعلومتين اما أن تكونا مجاورتين للضلع المعلوم
 أو احدهما مجاورة له والاخرى مقابلة له ففي هذه الحالة الاخيرة يبحث
 عن الزاوية الثالثة من المثلث بالطريقة المتقدمة في العملية السابعة فيصير
 كلتا الزاويتين المجاورتين للضلع معلومة فينبذ يرسم مستقيم غير محدود
 ويؤخذ منه الجزء د هـ بقدر الضلع المعلوم ثم تعمل في النقطة د زاوية
 هـ د و تساوى احدى الزاويتين المجاورتين للضلع المعلوم وتعمل في
 النقطة هـ زاوية د هـ ع تساوى المجاورة الاخرى فيتقاطع الخطان
 د و هـ ع في نقطة مثل ح وحينئذ يكون د هـ ح هو المثلث
 المطلوب

(الدعوى العاشرة العملية شكل ٧٩)

اذا علم من مثلث اضلاعه الثلاثة وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك أن
 يفرض ا احدا الاضلاع الثلاثة و ب الضلع الآخر و ج الضلع
 الثالث فيرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه بعد د هـ يساوى الضلع ا
 ثم تؤخذ قنطرة باليسكار بقدر الضلع الثانى ب و يركز في النقطة هـ ويرسم
 قوس دائرة ثم تؤخذ قنطرة باليسكار بقدر الضلع الثالث ج و يركز في النقطة
 د ويرسم قوس دائرة يقطع القوس الاقل في نقطة مثل و ثم يوصل د و
 هـ و فيكون د هـ ب هو المثلث المطلوب

(تنبيه)

يشترط في إمكان حل هذه المسئلة أن يكون مجموع كل ضلعين أكبر من
 الثالث وفاضلهما أصغر منهم

*(الدعوى)

* (الدعوى الحادية عشر العمالية شكل ٨٠ و ٨١ و ٨٢) *
 اذا علم من مثلث ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما وكان المطلوب رسم المثلث
 فطريقة ذلك أن يفرض الضلعان المعلومان a و b والزاوية المعلومه $\angle C$
 هي المقابلة للضلع c ومن المعلوم ان الزاوية المعلومه $\angle C$ اما أن تكون
 قائمة أو منفرجة أو حادة فان كانت قائمة أو منفرجة كان وترها أكبر أضلاع
 المثلث وحينئذ لرسم المثلث تنشأ زاوية مثل $\angle H$ و $\angle D$ تساوى الزاوية
 المعلومه $\angle C$ ويؤخذ $d = a$ ثم تؤخذ نقطة b بالبيكار بقدر الضلع
 المعلوم b ويركز في النقطة H ويرسم قوس يقطع الخط d في نقطة
 مثل u ويوصل المستقيم $H u$ فيكون $d H u$ هو المثلث المطلوب
 وان كانت الزاوية المعلومه $\angle C$ حادة فان كان الضلع المقابل لها a أكبر
 من الضلع b أجريت العمالية المتقدمة بعينها وحينئذ يكون $d H u$ هو
 المثلث المطلوب كما في (الشكل ٨١)

وان كان الضلع المقابل لها a أصغر من الضلع b فالقوس الذي مركزه
 H ونصف قطره d $= b$ يقطع الضلع d في نقطتين مثل
 u و e موضوعتين في جهة واحدة بالنسبة للنقطة d فاذن يحدث
 مثلثان $d H u$ و $d H e$ كلاهما يوافق حل المسئلة فكما في
 (الشكل ٨٢)

* (تنبيه) *

اعلم ان هذه المسئلة يستحيل حلها في جميع الاحوال اذا كان الضلع b
 أصغر من العمود المنزل من النقطة H على الخط d

* (الدعوى الثانية عشر العمالية شكل ٨٣) *

اذا علم ضلعان والزاوية المنحصرة بينهما من شكل متوازي الاضلاع وكان
 المطلوب رسمه فطريقة ذلك أن يفرض أحد الضلعين المعلومين a والضلع
 الآخر b والزاوية المنحصرة بينهما $\angle C$ ثم يرسم خط $d H = a$
 وتنشأ في النقطة d زاوية $\angle H = \angle C$ ويؤخذ $d u = b$

ويرسم قوسان مركزاً أحدهما النقطة $و$ ونصف قطره $و ع = د ه$
 ومركز الآخر النقطة $هـ$ ونصف قطره $هـ ع = د و$ ويوصل $و ع$
 و $هـ ع$ فيكون $د هـ ع و$ هو المتوازي الاضلاع المطلوب
 والدليل على صحة هذه العملية ان الاضلاع المتقابلة متساوية بالعمل وقد تقرر
 في المقالة الاولى ان الشكل الرباعي اذا تساوت اضلاعه المتقابلة كان
 متوازي الاضلاع ومن المعلوم ان هذا الشكل قد اشتمل على معاليم المسئلة
 بشروطها

* (تنبيه) *

اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة وكان الضلعان المحيطان بها غير متساويين
 كان الشكل الحادث مستطيلاً وان كانا متساويين كان مربعاً
 * (الدعوى الثالثة عشر العملية شكل ٨٤) *

اذا كان المطلوب تعيين مركز دائرة أو قوس معلوم فطريقة ذلك أن يؤخذ من
 المحيط أو من القوس ثلاث نقط مثل $ا و س و ح$ ويوصل $ا ب$
 $و س$ بالفعل أو بالوهم ثم يقام عمود $د هـ$ على وسط $ا ب$ وعمود $و ع$
 على وسط $س ح$ فالنقطة $و$ التي هي مائتي العمودين تكون هي المركز
 المطلوب

* (تنبيه) *

هذه الطريقة تستعمل لرسم محيط دائرة يمر بالنقط الثلاث $ا و س و ح$
 المعلومة وتستعمل أيضاً لرسم محيط دائرة يكون المثلث المعلوم $ا ب ح$
 داخله

* (الدعوى الرابعة عشر العملية شكل ٨٥) *

اذا كان المطلوب رسم مستقيم يمر بمحيط دائرة معلومة ويمر بنقطة معينة
 فطريقة ذلك أن يقال اذا كانت النقطة المعلومة $ا$ على المحيط يوصل نصف
 القطر $ح ا$ ويقام العمود $ا د$ على $ح ا$ فيكون $ا د$ هو المماس
 المطلوب

واذا

واذا كانت النقطة المعلومه α خارجة عن المحيط يوصل المستقيم α بين المركز والنقطة α وينصف α بنقطة مثل ω ويرسم محيط دائرة نصف قطر ω يساوي α و ω مركزه و فهذا المحيط يقطع المحيط المعلوم في نقطتين مثل β و γ فاذا وصل α - β و α - γ كان كل منهما مماسا للمحيط المعلوم ومارا بالنقطة المعلومه

والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل α - ω و α - ω لظهر أن كلامنا عن الزاويتين α - β و α - γ قائم لان كلامنا مرسومه في نصف الدائرة

• (تنبيه) •

اعلم ان المماس α - β يساوي المماس α - γ والزاوية α - β تساوي الزاوية α - γ لان المثلث α - β - ω القائم الزاوية في ω يساوي المثلث α - γ - ω القائم الزاوية في ω لان الوتر α - ω مشترك والضلع ω - β يساوي الضلع ω - γ

• (نتيجة) •

ينتج من هذه العملية طريقة لرسم محيط دائرة يمر بمحيطى زاوية معلومة

• (الدعوى الخامسة عشر العملية شكل ٨٧ و ٨٨ ثانى) •

اذا علم مثلث كالمثلث α - β - γ وكان المطلوب رسم دائرة داخلية فطريقة ذلك ان تنصف الزاوية α بالمستقيم α و ω والزاوية β بالمستقيم β و ω فالنقطة ω التى هى ملتقى المستقيمين تكون مركز الدائرة المطلوبة فاذا أنزل من النقطة ω اعمدة ω - δ و ω - ϵ و ω - ζ على اضلاع المثلث فهذه الاعمدة تكون متساوية كما نقرر في المقالة الاولى وحينئذ المحيط الذى مركزه النقطة ω ونصف قطره العمود ω - δ يكون مماسا لاضلاع المثلث المعلوم

• (تنبيهان) •

الاول حيث ان بعد النقطة ω عن الضلع β - γ كبعدها عن الضلع α - γ تكون على المستقيم النصف للزاوية α - β

ويعلم من ذلك ان الخطوط المستقيمة المنصفة لزوايا مثلث تتقاطع في نقطة واحدة

النهائي اذا امتد الخطان المنصفان لزاويتين خارجيتين من مثلث كالزاويتين م - ح و م - ح ك فنقطة تقاطعهما و تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ح - ح ولا امتدادى الضلعين الآخرين من المثلث واذا امتد الخطان المنصفان للزاويتين ل - ا و ا - ب فنقطة تقاطعهما و تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ا - ا ولا امتدادى الضلعين الآخرين من المثلث

ولو امتد الخطان المنصفان للزاويتين ع ا ح و ا ح ص ا كانت نقطة تقاطعهما و مركز الدائرة مماسة للضلع ا ح ولا امتدادى الضلعين الآخرين من المثلث

فحينئذ يمكن ان يرسم أربع دوائر تمس ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة

* (الدعوى السادسة عشر العملية شكل ٨٨ و ٨٩) *

اذا علم مستقيم مثل ا - ب وزاوية مثل ح وكان المطلوب ان يرسم على المستقيم ا - ب قطعة دائرة كل زاوية مرسومة فيها مساوية للزاوية المعلومة ح فطريقة ذلك ان يمد المستقيم ا - ب جهة د ثم تنشأ في النقطة ب زاوية د - ب ه = ح ويقام ب و عمودا على ه و ع و عمودا على وسط ا - ب ثم تؤخذ قمتها بالبيكار بقدر و ويركز في النقطة و التي هي ملتقى العمودين وترسم دائرة فتكون القطعة ا م - هي المطلوبة

والدليل على صحة هذه العملية ان الخط ب - ب مماس لكونه عمودا على نهاية نصف القطر و - ويلزم من هذا أن يكون نصف القوس ا ب - معيارا للزاوية ا - ب و للزاوية المحيطية ا م - فاذا تكون الزاوية ا م - = ا - ب = ب ه = د ح ويلزم من هذا أن تكون

كل زاوية مرسومة في القطعة ا م ب مساوية للزاوية المعلومة >

* (تنبيه) *

اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة كانت القطعة المطلوبة نصف دائرة قطرها
الخط المعلوم

تمت المقالة الثانية على يد المتوكل على ربه المعيد المبدى على عزت اقدى *
أحد خوجات العلوم الرياضية والطبيعية بـ مدرسة المهندسخانة الخديوية

* (دروس في المقالة الثالثة) *

المقالة الثالثة يبحث فيها عن مساحة الاشكال المستقيمة الاضلاع وعن

خواص الاشكال المتشابهة

* (الحدود) *

(حد ١) مساحة الشيء تعيين ما فيه من أمثال الوحدة الخطية او ابعاضها ان كان الشيء خطاً أو أمثال مربعها كذلك ان كان سطحاً أو أمثال مكعبها كذلك ان كان جسماً

(حد ٢) الشكلان المتكافئان شكلان متساويان في المساحة سواء كانا متشابهين أو غير متشابهين فالدائرة مثلاً يمكن ان تكافئ مربعاً كما ان المثلث يمكن ان يكافئ مستطيلاً أو مربعاً أو دائرة أو شكلاً مائلاً أو مستمسا أو نحو ذلك

ولا يكون الشكلان متساويين الا اذا أمكن انطباق أحدهما على الآخر انطباقاً كاملاً كالدائرتين المرسومتين ببعضين متساويين وكالمثلثين ذوي الاضلاع المتناظرة المتساوية

(حد ٣) ارتفاع متوازي الاضلاع هو كافي (الشكل ٩٣) العمود مثل هـ و المحصور بين الضلعين متقابلين مثل ا - ب و جـ د مأخوذ من قاعدتيه (حد ٤) ارتفاع المثلث هو كافي (الشكل ٩٤) العمود مثل ا ب النازل من رأس زاوية من زواياه مثل ا على الضلع المقابل لها مثل ب - جـ المأخوذ قاعدته

(حد ٥) ارتفاع شبه المنحرف هو كافي (الشكل ٩٥) العمود مثل هـ و المحصور بين الضلعين المتوازيين مثل ا - ب و جـ د المأخوذ من قاعدتيه

* (الدعوى الاولى النظرية شكل ٩٩ و ١٠٠) *

نسبة المستطيلين المتكافئين الى ارتفاع الى بعضهما كنسبة قاعدتيهما فاستطيلان مثل ا ب جـ د و ا ب هـ د المتكافئان في الارتفاع ا د نسبة

حدهما : الآخر :: القاعدة أ - : القاعدة أه
(برهانها) أن يفرض قولان بين القاعدتين أ - و أه مقياسا مشتركا
مثلى م بحيث تكون

القاعدة أ - = ٧ م مثلا

والقاعدة أه = ٤ م

فيكون أ - : أه :: ٧ م : ٤ م ويجعل م = ١ يكون
أ - : أه :: ٧ : ٤

فاذا قسمنا القاعدة أ - الى سبعة اجزاء متساوية كانت القاعدة أه
محتوية على أربعة اجزاء منها واذا اقيم من كل نقطة من نقط التقاسيم عمودا
على أ - انقسم المستطيل أ - ح د الى سبعة مستطيلات متساوية لان
قواعدها متساوية وارتفاعاتها كذلك

ومن حيث ان المستطيل أه ح د يحتوى على أربعة مستطيلات منها تكون
نسبة المستطيل أ - ح د : المستطيل أه ح د :: ٧ : ٤
فينتج من مقارنة هذه النسبة بالنسبة السابقة التى هى القاعدة أ - :
القاعدة أه :: ٧ : ٤ ان

نسبة المستطيل أ - ح د : المستطيل أه ح د :: القاعدة أ - :
القاعدة أه وهو المطلوب

وثانيا انه اذا لم يكن بين القاعدتين أ - و أه مقياس مشترك تكون
نسبة المستطيل أ - ح د : المستطيل أه ح د :: القاعدة أ - :
القاعدة أه

لانه لو لم تكن هذه النسبة صحيحة لكان الحد الرابع اما كبر من القاعدة
أه أو أصغر منها

فلو فرضناه أكبر من أه بان جعلناه مثل او لكان أ - ح د
: أه ح د :: أ - : او فلو قسمنا القاعدة أ - الى أقسام
متساوية بشرط ان يكون القسم الواحد أصغر من البعد هو و لوقعت
بالاقل نقطة من نقط التقاسيم مثل ه بين ه و و اذا اقمنا منها عمودا

مثل

مثل $ك$ على $ا ب$ يحدث مستطيل $ا ب ك$ فيلزم أن تكون
نسبة المستطيل $ا ب ح د$: المستطيل $ا ب ك$:: $ا ب$: $ا ك$
لأن بين القاعدتين $ا ب$ و $ا ب$ مقياسا مشتركا
وحيث أن المقدمات المتناظرة متساوية في هاتين المتناسبتين يتركب من
التوالي متناسبة هي

$$ا ه و : ا ب ك :: ا و : ا ب$$

وحيث أن الحد الأول من هذه المتناسبة أصغر من الحد الثاني يلزم أن يكون
الحد الثالث أصغر من الحد الرابع والواقع هنا عكسه فلا تكون هذه المتناسبة
صحيحة وحيث أنها ناتجة من متناسبتين يكون الغلط في أحدهما أو فيهما
معا وحيث أن المتناسبة الثمانية

$$ا ب ح د : ا ب ك :: ا ب : ا ب$$

يكون الغلط حاصل في المتناسبة الأولى

$$ا ب ح د : ا ه و :: ا ب : ا و$$

أن يكون أكبر من القاعدة $ا ه$

وبمثل هذا يبرهن على أن الحد الرابع لا يمكن أن يكون أصغر من القاعدة $ا ه$
فحينئذ تكون نسبة المستطيلين المتحدى الارتفاع إلى بعضهما ~~كنسبة~~
قاعدتيهما وهو المطلوب اثباته

* (الدعوى الثانية النظرية شكل ١٠١) *

نسبة أي مستطيلين إلى بعضهما ~~كنسبة~~ حاصل ضرب قاعدة الأقل
في ارتفاعه إلى حاصل ضرب قاعدة الثاني في ارتفاعه

فإذا رمز بالحرف $م$ لمستطيل قاعدته $ق$ وارتفاعه $ع$ وبالحرف

$ص$ لمستطيل آخر قاعدته $ق$ وارتفاعه $ع$ يكون $م : ص$

$$:: ق \times ع : ق \times ع$$

(برهانه) أن يتصور مستطيل ثالث مثل $م$ قاعدته تساوى قاعدة

المستطيل الاول وارتفاعه يساوى ارتفاع المستطيل الثانى فيكون

$$صه : م :: ع : عَ و$$

م : صه :: و : قَ فاذا ضربنا حدود التناسيب الاولى فى حدود التناسيب الثانية بالترتيب يحدث

صه \times م : م \times صه :: ع \times و : و \times عَ وبقسمة حدى التناسيب الاولى على م ينتج

صه : ع :: ع \times و : و \times عَ وهو المطلوب اثباته

• (فى مساحة المستطيل) •

مساحة المستطيل هى نسبته الى مستطيل آخر مأخوذة وحدة وحيث ثبت فى النظرية المتقدمة أن نسبة أى مستطيلين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدته الاولى فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدته الثانى فى ارتفاعه ينتج أنه اذا جعل أحد المستطيلين وحدة للقياس علمت مساحة المستطيل الآخر بقسمة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه على حاصل ضرب قاعدته وحدة القياس فى ارتفاعه

• (مثال ذلك) •

اذا كان المستطيل صه قاعدته و = ٦ وارتفاعه ع = ٤
فما تكون مساحته بالنسبة للمستطيل صه الذى قاعدته و = ٣
وارتفاعه عَ = ٢

فالجواب أن يقال ان نسبة مساحة الاول صه الى الثانى صه كنسبة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه أى ٦ \times ٤ الى حاصل ضرب قاعدته الثانى فى ارتفاعه أى ٣ \times ٢ أو $\frac{٦ \times ٤}{٣ \times ٢} = ٤$

أعنى ان المستطيل صه يحتوى على المستطيل صه المجهول وحدة

أربع مرات

والعادة أن تقاس السطوح بمربع الوحدة الخطية أي بالمربع الذي ضلعه يساوي وحدة الطول

فإذا جعل المتر وحدة للطول يكون المتر المربع وحدة للسطوح وإذا كان الذراع وحدة للطول يكون الذراع المربع وحدة للسطوح وهكذا وحيث أن مربع الواحد واحد ينتج من ذلك أن نسبة أي مستطيل إلى مربع الوحدة الخطية كنسبة حاصل ضرب قاعدة المستطيل المذكور في ارتفاعه إلى حاصل ضرب قاعدة المربع في ارتفاعه وحيث أن قاعدة مربع الوحدة الخطية تساوي الوحدة الخطية وارتفاعه كذلك تكون المناسبة هكذا

$$\frac{\text{المستطيل}}{\text{المربع}} = \frac{\text{حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع}}{1 \times 1}$$

اعني ان مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه فحينئذ المستطيل الذي قاعدته $3,53^m$ وارتفاعه $2,20^m$ = $7,94^m$ مساحته $3,53^m \times 2,20^m = 7,94^m$ أمتار مربعة أو ٢٥ ستمترا مربعا و ٩٤ ديسيمترا مربعا و ٧ أمتار مربعة
* (الدعوى الثالثة النظرية شكل ١٠١ ثانيا) *

مساحة المثلث القائم الزاوية تساوي نصف حاصل ضرب احد الضلعين المحيطين بزاويته القائمة في الآخر

فالمثلث ABC القائم الزاوية في C مساحته تساوي نصف حاصل ضرب AC في BC أي $\frac{AC \times BC}{2}$

لأننا إذا قمنا بالمستطيل الذي قاعدته BC وارتفاعه AC نشاهد أن هذا المستطيل ضعف المثلث ABC وحيث أن مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه ينتج أن مساحة المثلث ABC تساوي نصف حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه وهو المطلوب إثباته

* (الدعوى الرابعة النظرية شكل ١٠٢ ثانى) *

مساحة أى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

فمساحة المثلث $ا-د$ مثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته $د-ه$

فى ارتفاعه $ا-د$ أى تساوى $\frac{د \times ا}{٢}$ لأن مساحة المثلث $ا-د$

القائم الزاوية فى $د$ تساوى $\frac{د \times ا}{٢}$ ومساحة المثلث $ا-د$ القائم

الزاوية فى $د$ تساوى $\frac{د \times ا}{٢}$ ومساحة المثلث الكلى $ا-د$ تساوى

مجموع مساحتي المثلثين $ا-د$ و $ا-ه$ فتكون مساحة المثلث $ا-د$

$$= \frac{د \times ا}{٢} + \frac{د \times ه}{٢} = \frac{د \times ا + د \times ه}{٢} =$$

$$\frac{د(ا+ه)}{٢} \text{ أو } = \frac{د \times ا}{٢} \text{ وهو المطلوب اثباته}$$

* (وينتج من هذه النظرية نتائج) *

الاولى ان نسبة المثلثات المتحدة القاعدة الى بعضها كنسبة ارتفاعاتها الى بعضها

الثانية ان نسبة المثلثات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة قواعدها الى بعضها

الثالثة ان نسبة أى مثلثين الى بعضها كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه

الرابعة ان المثلثات ذات القاعدة المشتركة التى رؤسها على مستقيم مواز للقاعدة المذكورة متكافئة ولا يوضح ذلك برمز بالحرف $م$ لمثلث قاعدته

$ق$ وارتفاعه $ع$ وبالحرف $م$ لمثلث آخر قاعدته $ق$ وارتفاعه

$$ع \text{ فيكون } م = \frac{ع \times ق}{٢} = م \text{ أو } \frac{ع \times ق}{٢} = م \text{ وبقسمتهما أحدهما على الآخر يحدث}$$

$$\frac{ع \times ق}{٢} : \frac{ع \times ق}{٢} = م : م \text{ أو } ع : ق = م : م \text{ فإذا}$$

$$\text{كانت } ق = م \text{ يكون } م : م :: ع : ع$$

وإذا

واذا كانت $ع = ح$ يكون $م : ن :: ق : ر$
(تنبيه) اذا وقع ارتفاع المثلث خارجا عنه كما في الشكل نجري فيه النظرية
المتقدمة بطرح مساحة المثلث $ا د ب$ من مساحة المثلث $ا د ح$ هكذا

$$\begin{aligned} ا د ح &= \frac{ا د \times ح د}{٢} \\ ا د ب &= \frac{ا د \times ب د}{٢} \text{ فيكون} \\ ا د ح - ا د ب &= \frac{ا د \times ح د}{٢} - \frac{ا د \times ب د}{٢} \\ ا د ح - ا د ب &= \frac{ا د (ح د - ب د)}{٢} \end{aligned}$$

• (الدعوى الخامسة النظرية شكل ٩٧) •

مساحة أي شكل متوازي الاضلاع تساوي حاصل ضرب قاعدته
في ارتفاعه

فالشكل $ا ب ح د$ المتوازي الاضلاع مساحته تساوي حاصل ضرب
قاعدته $ا ب$ في ارتفاعه $د ه$ أي $ا ب \times د ه$
(برهانها) أن يوصل القطر $د ب$ فينقسم المتوازي الاضلاع الى مثلثين
متساويين ~~ك~~ كما تم اثباته في المقالة الاولى فمساحة المثلث $ا ب د$
 $= \frac{ا ب \times د ه}{٢}$ ومساحة المثلث $د ب ح$ $= \frac{د ب \times ح و}{٢}$ و $ا ب = د ب$
 $= ا ب$ و $د ه = ح و$ فتكون مساحة المثلث $د ب ح$
 $= \frac{ا ب \times د ه}{٢}$

ومساحة متوازي الاضلاع $ا ب ح د$ تساوي مساحة المثلث $ا ب د$
زائدة مساحة المثلث $د ب ح$ فتكون مساحة متوازي الاضلاع

$$\begin{aligned} ا ب ح د &= \frac{ا ب \times د ه}{٢} + \frac{ا ب \times د ه}{٢} = ا ب \times د ه \\ ا ب ح د &= \frac{ا ب (د ه + د ه)}{٢} = ا ب \times د ه \\ ا ب ح د &= ا ب \times د ه \end{aligned}$$

المطلوب

• (وينتج من هذه النظرية تلخيص) •

الاولى ان نسبة الاشكال المتوازية الاضلاع المتحدة المقاعدة الى بعضها كنسبة ارتفاعها الى بعضها

الثانية ان نسبة الاشكال المتوازية الاضلاع المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة قواعدها الى بعضها

الثالثة ان نسبة أى شكلين متوازي الاضلاع الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول في ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثاني في ارتفاعه

الرابعة ، انه اذا اتحدت القاعدة والارتفاع في مستطيل ومتوازي الاضلاع كان المستطيل مكافئاً للمتوازي الاضلاع

(الدعوى السادسة النظرية شكل ٩٥)

مساحة شبه المنحرف تساوي نصف حاصل ضرب ارتفاعه في مجموع قاعدتيه المتوازيتين

فشكل $a-b$ د الشبيه بالمنحرف مساحته تساوي نصف حاصل ضرب ارتفاعه h في مجموع قاعدتيه المتوازيتين a و b أى تكون مساحته $= \frac{h(a+b)}{2}$

(برهانها) أن يوصل القطر ac فينتقسم الشكل الى مثلثين $a-b$ و $a-c$

ومساحة المثلث $a-b$ $= \frac{h \times a}{2}$ ومساحة المثلث $a-c$ $= \frac{h \times b}{2}$

ومساحة شبه المنحرف $a-b$ د تساوي مساحة المثلث $a-b$ زائدة مساحة المثلث $a-c$ فتكون مساحة $a-b$ د $= \frac{h \times a}{2} + \frac{h \times b}{2}$

$= \frac{h(a+b)}{2}$ وحيث ان $او = \frac{h \times a}{2} + \frac{h \times b}{2}$ تكون مساحة $a-b$ د $= \frac{h(a+b)}{2}$ وهو المطلوب اثباته

(تنبيه ١)

حيث تبين أن مساحة شبه المنحرف $a-b$ د $= \frac{h(a+b)}{2}$

$او = \frac{h \times a}{2} + \frac{h \times b}{2}$

بمعنى ذلك أن مساحة شبه المنحرف

تساوي

تساوى حاصل ضرب ارتفاعه في نصف مجموع قاعدتيه المتوازيين أو تساوى حاصل ضرب نصف ارتفاعه في مجموع قاعدتيه المتوازيين

(تنبيه ٢)

يمكن أخذ مساحة شبه المنحرف بضرب ارتفاعه في قاعدتيه المتوسطة بين قاعدتيه المتوازيين لأن هذه القاعدة المتوسطة تساوى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيين كما صرح به في المقالة الأولى

(الدعوى السابعة النظرية شكل ١٠٦)

إذا قسم مستقيم مثل ad إلى قسمين مختلفين مثل a و d فالربع المنشأ على المستقيم الكامل ad يحتوى على المربع المنشأ على الجزء a وعلى المربع المنشأ على الجزء الآخر d وعلى ضعف المستطيل المكون

$$\text{من الجزئين } a \text{ و } d \text{ أعني أن } ad^2 \text{ أو } (a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2$$

(برهانها) أن يرسم المربع $adde$ ويؤخذ $au = a$ ويمتد ue موازاً للمستقيم ad ثم $ط$ موازياً للمستقيم ah فينقسم المربع $adde$ إلى أربعة أجزاء (الأول) $aede$ وهو المربع المنشأ على a لاتناً أخذنا $au = a$ (والثاني) $aeط$ وهو المربع المنشأ على d لأن $ad = ae$ و $ah = ط$ أو فيكون $ad = ae$ و $ah = ط$ وبسبب التوازي يكون $ae = ط$ و $دع = ط$ فيكون $ط$ مساوياً للمربع المنشأ على d فاذا طرحنا هذين المربعين من المربع الكلي يبقى المستطيلان $دع$ و $هط$ ومساحة كل واحد منهما تساوى $a \times d$ وبهذا ثبت المطلوب

(تنبيه)

هذه القضية تبين بالقانون الجبرى هكذا

$$(d + c)^2 = d^2 + c^2 + 2dc$$

• (الدعوى الثامنة النظرية شكل ١٠٧) •

أى مستقيم مثل ad كان فاضل مستقيمين مثل ab و cd يكون المربع المنشأ عليه مساويا للمربع المنشأ على أحدهما ab زائدا المربع المنشأ على الآخر cd ناقصا ضعف مستطيل الخطين ab و cd أعنى أن

$$ad^2 \text{ أو } (ab - cd)^2 = ab^2 + cd^2 - 2abcd$$

(برهانها) أن يرسم المربع $abce$ ف ثم يؤخذ $ah = ad$ ويمتد ce موازيا للمستقيم cd و ch موازيا ab ويكمل المربع $hced$ ف لك مساحة كل من المستطيلين $cdce$ و $cehd$ تساوى $abcd$ فاذا طرحناهما من الشكل الكلى

$abce$ لك هذا الذى مقدارها يساوى $ab^2 + cd^2$ يبقى المربع $ahcd$ وبهذا يثبت المطلوب

• (تنبيه) •

هذه القضية تبين بالقانون الجبرى هكذا

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

• (الدعوى التاسعة النظرية شكل ١٠٨) •

المستطيل المنشأ على مجموع خطين مثل ab و cd وعلى فاضلهما يساوى فاضل مربعى هذين الخطين أعنى أن $(a+b)^2 \times (a-b) =$

$$a^3 - b^3$$

(برهانها) أن يرسم مربعان $abce$ و $acdh$ على ab و ah ثم يمتد ab بكمية cd ويكمل المستطيل $acdh$

فالقاعدة

فالقاعدة اك من المستطيل هي حاصل جمع الخطين ا ب و ب ه وارتفاعه ا ه هو فاضل الخطين المذكورين فحينئذ المستطيل اكله $= (ا - ب + ب ه) \times (ا - ب - ب ه)$ لكن هذا المستطيل مركب من جزئين ا ب ه ه + ب ه ل ك والجزء ب ه ل ك يساوى المستطيل ه د ع ف لان ب ه = د ه و ب ه ل ك = ه د ف فيكون اكله = ا ب ه ه + ه د ع ف وحيث ان هذين الجزئين مكونان للمربع ا ب ه ف ناقصا المربع د ع ه الذى هو المربع المنشأ على ب ه يكون

$$(ا - ب + ب ه) \times (ا - ب - ب ه) = ا ب ه ه - ب ه ل ك$$

• (تنبيه) •

هذه القضية تكذب بالقانون الجبرى هكذا

$$(ا + ب) \times (ا - ب) = ا ب - ب ه$$

• (الدعوى العاشرة النظرية • شكل ١٠٩) •

المربع المرسوم على وتر الزاوية القائمة من المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين فليكن ا ب ه مثلث قائم الزاوية فى ا فترسم مربعات على الاضلاع الثلاثة ثم ينزل من الزاوية القائمة على الوتر عمود ا د يمتد الى ه ويوصل القطران ا ب و ب ه فحيث ان الزاوية ا ب ه مركبة من الزاوية ا ب د ومن الزاوية القائمة ب د ه وان الزاوية ب د ه مركبة من الزاوية ا ب د المذكورة ومن الزاوية القائمة ا د ه تكون الزاوية ا ب ه = ب د ه ولكن ا د = د ه من المربع و ب د = ب ه كذلك يكون المثلث ا ب د مساويا للمثلث ب د ه لتساوى الزاوية المحصورة بين الاضلاع المتساوية بالتناظر واعلم ان المثلث ا ب د نصف المستطيل د ه ه المتحد منه فى القاعدة د ه

وفي الارتفاع $د$ وان المثلث $د$ $هـ$ نصف المربع $ا$ $ب$ لان الزاوية
 $د$ قائمة كالزاوية $ح$ $ا$ $ك$ والمستقيمين $ا$ $ب$ و $ا$ $ك$ لا يكونان
 الا خطا مستقيما وازيالا مستقيمين $د$ $هـ$ فحينئذ يكون الارتفاع $ا$ $د$
 مشتركا بين المثلث $د$ $هـ$ والمربع $ا$ $ب$ المتحدين في القاعدة $د$ $هـ$
 فيكون المثلث نصف المربع وقد تبين ان المثلث $ا$ $د$ $هـ$ مساويا للمثلث $د$ $هـ$
 فيكون المستطيل $د$ $هـ$ $ز$ الذي هو ضعف المثلث $ا$ $د$ $هـ$ مكافئا للمربع
 $ا$ $ب$ الذي هو ضعف المثلث $د$ $هـ$ $ز$ وبمثل هذا يبرهن على ان المستطيل
 $د$ $هـ$ $ز$ مكافئ للمربع $ا$ $ب$ وحيث ان المستطيلين $د$ $هـ$ $ز$ و $د$ $هـ$ $و$
 متساويان للمربع $د$ $هـ$ $و$ يكون المربع $د$ $هـ$ $و$ المنشأ على الوتر
 مساويا لمجموع المربعين $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ و $ا$ $ب$ $ح$ المنشأين على الضلعين
 الآخرين أي ان $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ = $ا$ $ب$ $ح$ + $ا$ $ب$ $ح$ $ط$

• (نتائج) •

الاولى مربع أحد ضلعي الزاوية القائمة يساوي مربع الوتر ناقصا مربع

الضلع الآخر ويكتب هكذا $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ = $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ - $ا$ $ب$ $ح$ $ط$

الثانية اذا كان $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ مربعاً قطره $ا$ $ب$ يكون المثلث $ا$ $ب$ $ح$

قائم الزاوية ومتساوي الساقين فيحدث $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ = $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ + $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ = $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ ٢

أعني ان المربع المنشأ على القطر $ا$ $ب$ ضعف المربع المنشأ على الضلع $ا$ $ب$

وحيث ان $ا$ $ب$ $ح$ $ط$: $ا$ $ب$ $ح$ $ط$:: ٢ : ١ يكون $ا$ $ب$ $ح$ $ط$: $ا$ $ب$ $ح$ $ط$:: ٢ : ١

أعني انه لانسبة قياسية بين قطر المربع وضلعه أنظر (شكل ١١٨)

الثالثة حيث تبين ان المربع $ا$ $ب$ $ح$ $ط$ مكافئ للمستطيل $د$ $هـ$ $ز$ والارتفاع

$د$ $هـ$ $ز$ مشترك بين المربع $د$ $هـ$ $و$ والمستطيل $د$ $هـ$ $ز$ تكون نسبة

المربع $د$ $هـ$ $و$ للمستطيل $د$ $هـ$ $ز$ كنسبة القاعدة $د$ $هـ$ للقاعدة

$د$ $هـ$ $ز$ أعني يكون $د$ $هـ$ $ز$: $ا$ $ب$ $ح$ $ط$:: $د$ $هـ$: $د$ $هـ$ $ز$ أعني ان نسبة

مربع

مربع الوتر لمربع أحد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة كنسبة الوتر للسهم المجاور لهذا الضلع والسهم هنا جزء من الوتر محدود بالعمود النازل من الزاوية القائمة فالجزء $د$ هو السهم المجاور للضلع $ا$ والجزء $د$ هو السهم المجاور للضلع $ح$.

ويوجد أيضاً كما تقدم $د$: $ا$:: $د$: $ح$ الرابعة حيث ان للمستطيلين $د$ هو و $د$ ح ه ارتفاعا واحدا تكون نسبة أحدهما الى الآخر كالنسبة بين $د$ و $د$ ومن حيث ان المستطيلين مكافئان للمربعين $ا$ و $ح$ يكون

$$ا : ح :: د : د$$

يعنى ان نسبة أحد مربعى ضلعى الزاوية القائمة الى الآخر كنسبة سهمى الوتر المجاورين لهما

• (تعريف • شكل ١٠٩. الثانى) •

مقطع مستقيم مثل $ا$ على اخر مثل $د$ هو الجزء $ا$ المحصور بين موقعى العمودين النازلين من النقطتين $ا$ و $ب$ على المستقيم $د$ • (الدعوى الحادية عشر النظرية • شكل ١١٠) •

مربع الضلع المقابل للزاوية الحادة من أى مثلث يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين ناقصا ضعف المستطيل المكون من أحدهذين الضلعين ومن مقطع الآخر على الاول

فاذا كانت الزاوية $ح$ حادة فى المثلث $ا$ و $ا$ و $ب$ نازلنا عمودا $د$ على مجاورها $د$ يكون

$$ا^2 = ا د^2 + د ب^2 - ٢ د ب د$$

(برهانها) أن يقال لا يخلو اما أن يقع العمود داخل المثلث أو خارجه فاذا وقع العمود $د$ داخل المثلث $ا$ كان $د = د = د$

$$\text{ومنه ينتج } \overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} - 2 \overline{sd} \times \overline{sd}$$

$$\text{فاذا أضفنا } \overline{sd} \text{ يكون } \overline{sd} + \overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} + \overline{sd} - 2 \overline{sd} \times \overline{sd}$$

$$\text{وحيث ان المثلثين المقامى الزاوية } \overline{sd} \text{ و } \overline{sd} \text{ يتجان } \overline{sd} + \overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} \text{ و } \overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} \text{ يكون}$$

$$\overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} - 2 \overline{sd} \times \overline{sd}$$

$$\text{واذا وقع العمود } \overline{sd} \text{ خارج المثلث } \overline{sd} \text{ كان } \overline{sd} = \overline{sd} - \overline{sd} \text{ وعليه يكون}$$

$$\overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} - 2 \overline{sd} \times \overline{sd} \text{ فاذا أضفنا } \overline{sd}$$

$$\text{واختصرنا نتج } \overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} - 2 \overline{sd} \times \overline{sd}$$

• (الدعوى الثانية عشر النظرية • شكل ١١١) •

مربع وتر الزاوية المنفرجة من أى مثلث منفرج الزاوية يساوى مجموع مربعي الضلعين الآخرين زائد اضعف المستطيل المكون من أحدهما ومن مسقط الآخر على الأول

فاذا كانت الزاوية \overline{sd} من المثلث \overline{sd} منفرجة وأنزلنا

$$\text{اد عمودا على مجاورها } \overline{sd} \text{ يكون } \overline{sd} + \overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} + 2 \overline{sd} \times \overline{sd}$$

(برهانها) أن يقال ان العمود لا يمكن أن يقع داخل المثلث لانه لو وقع في \overline{sd} مثلث كان في المثلث \overline{sd} زاوية قائمة \overline{sd} وزاوية منفرجة \overline{sd} لكن هذا غير ممكن فلا يقع العمود الا خارج المثلث وعينئذ يكون $\overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd}$

$$\text{ومنه ينتج } \overline{sd} = \overline{sd} + \overline{sd} + 2 \overline{sd} \times \overline{sd} \text{ فاذا أضفنا}$$

اد $\frac{1}{2}$ واختصرنا كما في النظرية السابقة حدث

$$\overline{ا-} = \overline{ا ح} + \overline{ح-} + ٢ ح \times ح د$$

* (الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ١١٢) *

اذا وصل مستقيم مثل اه من رأس أى مثلث مثل ا- ح الى وسط قاعدته حدث

$$\overline{ا-} + ٢ ا ه = \overline{ا ح} + ٢ ح ه$$

(برهانها) أن ننزل العمود اد على القاعدة ح- فن المثلث ا ه ح يحدث

$$\overline{ا ح} = \overline{ا ه} + \overline{ه ح} - ٢ ه ح \times ه د$$

ومن المثلث ا- ه يحدث

$$\overline{ا-} = \overline{ا ه} + \overline{ه-} + ٢ ه- \times ه د$$

فاذا جمعنا ولا حظنا ان ه- = ه ح يحدث

$$\overline{ا-} + ٢ ا ه = \overline{ا ح} + ٢ ح ه$$

* (الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ١١٣ الثانى) *

كل شكل رباعي مجموع مربعات أضلاع الاربعة يساوى مجموع مربعي قطريه زائدا اربعة أمثال مربع الخط الموصل بين وسطيهما

(برهانها) أن يفرض ا ح و د- قطري المربع ا- د و ع و وسطيهما يتم وصل و- و د و ع و فيقتضى النظرية المتقدمة يحدث

$$\text{من المثلث ا- ح} \quad \overline{ا-} + \overline{ح-} = \overline{ا ح} + ٢ ح و$$

$$\text{ومن المثلث ا د ح} \quad \overline{ا د} + \overline{د ح} = \overline{ا ح} + ٢ ح و$$

$$\text{وبالجمع يكون} \quad \overline{ا-} + \overline{ا د} + \overline{ح-} + \overline{د ح} = \overline{ا ح} + \overline{ا ح} + ٢ ح و + ٢ ح و$$

$$= ٢ (س د + د و) + ٤ ا و$$

ومن المثلث س د و $س د + د و = ٢ - ٢ س ع = ٢ - ٢ و ع$ فيكون

$$٢ - ٢ س د + ٢ س د + ٢ د و = ٢ س د + ٢ د و + ٢ و ع + ٤ ا و$$

وحيث ان $٢ ا و = ٢ ا و$ و $٢ س د = ٢ س د$ يكون

$$٢ - ٢ س د + ٢ س د + ٢ د و = ٢ س د + ٢ د و + ٢ و ع + ٤ ا و$$

نتيجة اذا كان الشكل الرباعي متوازي الاضلاع ان عدم المستقيم ع و
وكان مجموع مربعات الاضلاع الاربعة من أى شكل متوازي الاضلاع
مساويا مجموع مربعي قطريه

* (في الخطوط المتناسبة والاشكال المشابهة) *

* (الدعوى الخامسة عشر النظرية * شكل ١١٤) *

المستقيم الموازي لاحد اضلاع مثلث يقسم ضلعيه الاخرين الى اجزاء
متناسبة فالمستقيم مثل د ه الموازي للقاعدة س د من المثلث ا س د
يقسم الضلعين ا س و ا د الى اجزاء متناسبة بحيث يكون
ا د : د س :: ا ه : ه د

(برهانها) أن يوصل س ه و د ه فيحدث مثلثان س ه د و د ه د
متكافئان لالتحاد القاعدة د ه ونسوى الارتفاعين لان الرأسين س
و د موضوعتان على مستقيم مواز للقاعدة والنسبة بين المثلثين ا د ه
و س ه د المشتركة في الرأس ه والمتحدتين في الارتفاع كالنسبة بين
قاعدتيهما ا د و د س أعني

$$ا د ه : س ه د :: ا د : د س$$

والنسبة بين المثلثين ا د ه و د ه د المشتركة في الرأس ه والمتحدتين
في الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما ا ه و ه د أعني
ا د ه : د ه د :: ا ه : ه د

يمكن

لكن المثلث سهه يكافئ ههه فيكون
 اه : اه :: اه : هه

* (نتائج) *

الاولى ينتج من المناسبة المتقدمة ان

اه + سه : اه :: اه + هه : اه + هه

اه : اه :: اه : اه وان

اه : سه :: اه : هه

الثانية المستقيمان مثل اه و هه المقطوعان بتوازيات اه و هه

و هه و سه الخ ينقسمان الى اجزاء متناسبة بحيث يكون

هه : سه :: سه : هه

لانا اذا مددنا المستقيمين اه و هه وكانت ط نقطة تلاقيهما يحدث

من المثلث طهه الذي فيه الخط اه مواز للقاعدة هه ان

طه : اه :: طو : هه او

طه : طو :: اه : هه

ومن المثلث ههط ان

طه : هه :: طو : هه

طه : طو :: هه : هه فينتج

اه : هه :: هه : هه

وبمثل هذا ينسج ان

هه : هه :: هه : هه وهكذا

اى ان الخطين اه و هه منقسمان بالخطوط المستقيمة المتوازية اه

و هه و هه الخ الى اجزاء متناسبة

* (الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ١١٦) *

اذا قطع خط مثل هه ضلعين مثل اه و اه من مثلث مثل

اهه بحيث يكون اه : اه :: اه : هه فيكون الخط

د ه موازياً للقاعدة د ه وهذه عكس الدعوى السابقة
(برهانها) أن يقال لو لم يكن د ه موازياً للقاعدة د ه بان كان د و
هو الموازى لها لحدث ا د : د :: ا و : و وقد فرضنا ان
د : د :: ا ه : ه فينتج من مقارنة هذه التناسبة بالسابقة
ان ا و : و :: ا ه : ه وهى محالة

• (الدعوى السابعة عشر النظرية * شكل ١١٧ و ١١٧ الثانى) •
الخط ا د المنصف لزاوية مثل ا من مثلث مثل ا د ه يقسم القاعدة
د ه الى قسمين د ه و د ه مناسبين للضلعين ا د و ا ه
والخط ا و المنصف لزاوية الخارجة د ا ه يمتد على القاعدة
المتحدة جزئين د ه و د ه مناسبين للضلعين المذكورين
د ه و ا ه

(برهان القضية الاولى) أن يرسم من النقطة د خط مثل د ه يوازى
ا د ويمتد حتى يقطع الامتداد د ا فيكون فى المثلث د ه ه خط ا د
موازياً لقاعدة د ه ويحدث د ه : د :: ا د : ا ه لكن
المثلث ا د ه متساوى الساقين لانه يلزم من توازى ا د و د ه أن
تكون الزاوية ا د ه = د ا ه والزاوية ا ه د = د ا د

وحيث ان د ا د = د ا د بالفرض تكون الزاوية ا د ه = ا ه د
ويكون ا ه = ا د فاذا وضعنا ا د عوضاً عن ا ه فى التناسبة
المتقدمة يكون د ه : د :: ا د : ا ه وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يرسم د ه يوازى ا و فيحدث من المثلث
د ا و هذه التناسبة د ه : و :: ا د : ا و وبمثل ما تقدم
يبرهن على ان المثلث ا د ه متساوى الساقين أى ان ا د = ا ه
فكيون د ه : و :: ا د : ا و وهو المطلوب

• (تعريف) •

المثلثان المتشابهان مثلثان أضلاعهما المتناظرة متناسبة فاذا علم مثلث

أم يمكن دائماً رسم مثلث مشابه له لأنه إذا غيرت أضلاع المثلث المعلوم
تغير انسيبها فنحدث ثلاثة أضلاع آخر يمكن بهاتين مكوّن مثلث لأن كلا منها
أقل من مجموع الضلعين الآخرين

(الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ١١٩)

إذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعهما المتناظرة
(والأضلاع المتناظرة هي المقابلة لزاويا المتساوية)

فإذا كان في مثلثين مثل $ا - ب - ج$ و $د ه ز$ زاوية $ا = د$ وزاوية
 $ب = ز$ و $د ه$ وزاوية $ا - ب = ه ز$ يكون

$$ب - ج : د ه :: ا - ب : د ه :: د ه : د ه$$

(برهانها) أن يقال لو وضع الضلعان $ب - ج$ و $د ه$ على استقامة
واحدة ومد الضلعان $ا - ب$ و $د ه$ حتى التقيا في نقطة مثل $و$ اكان
الشكل الحادث $ا - ب - ج$ و متوازي الأضلاع لأنه يلزم من كون الخط
 $ب - ج$ مستقيماً واحداً وزاوية $ب - ج = د ه$ أن يكون الخط $ا - ب$

موازي للخط $د ه$ أو $و ه$ كما تقرّر ذلك في المقالة الاولى وكذا يلزم من
كون الزاوية $ا - ب = د ه$ أن يكون الخط $ا - ب$ أو $و ه$
موازي للخط $د ه$

ويلزم من كون الخط $ا - ب$ موازياً للقاعدة $و ه$ في المثلث $ب - ج - ه$
أن يكون $ب - ج : د ه :: ا - ب : د ه$ كما تقرّر ذلك في النظرية
الخامسة عشر فإذا وضع في هذه المتناسبة الخط $د ه$ بدل مساويه $ا - ب$
تكون نسبة $ب - ج : د ه :: ا - ب : د ه$

ويلزم من كون الخط $د ه$ موازياً للضلع $ب - ج$ أن يكون $ب - ج : د ه :: د ه : د ه$
فإذا وضع $ا - ب$ بدل مساويه $د ه$ يكون $ب - ج : د ه :: ا - ب : د ه$
فإذا وضع $د ه$ بدلاً من اتحاد نسبة $ب - ج : د ه$ في هذه
المتناسبة والمتناسبة المتقدمة أن يكون $ا - ب : د ه :: ا - ب : د ه$
أي أن الأضلاع المتناظرة متناسبة فقد ثبت بهذا أن المثلثين اللذين زواياهما

المتناظرة متساوية. تشابهان وهو المطلوب
وينتج من هذه النظرية انه يكفي لتشابه المثلثين تساوي زاويتيهم لان الزاوية
الثالثة تكون حينئذ متساوية لتطيرتها

• (الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل ١٢٠) •

المثلثان اللذان اضلاعهما المتناظرة متناسبة زواياهما المتناظرة
متساوية.

فالمثلثان مثل $ا-ح-و$ و $د-ه-ز$ اذا كان فيهما $ر-ح : ه-و$
:: $ا-ب : د-ه$:: $ا-ح : د-و$ تكون الزاوية $ا = د$
والزاوية $ر = ه$ والزاوية $ح = و$

(برهانها) ان يقال لو اثبتت زاوية مثل $و$ هـ $ر$ مساوية للزاوية $ر$
وزاوية مثل $هـ و ر$ مساوية للزاوية $ح$ لكانت الزاوية $ر$ من المثلث
 $هـ و ر$ مساوية للزاوية $ا$ وحينئذ تكون كل زاوية من المثلث $ا-ح-و$
مساوية لتطيرتها من المثلث $د-ه-ز$ ويلزم من هذا أن يكون
 $ر-ح : ه-و :: ا-ب : د-ه$ والمفروض ان

$ر-ح : ه-و :: ا-ب : د-ه$ ويلزم من تساوي الحدود الثلاثة
في هاتين التناسبتين أن يكون الحد الرابع $هـ ر = هـ د$ وكذا يلزم من
تساوي الزوايا المذكورة أن تكون

$ر-ح : ه-و :: ا-ح : د-و$ والمفروض ان

$ر-ح : ه-و :: ا-ح : د-و$ ويلزم أيضا من تساوي الحدود الثلاثة
في هاتين التناسبتين أن يكون الحد الرابع $ور = و د$ وحيث تساوت
الاضلاع المتناظرة من المثلثين $د-ه-ز$ و $ر-ه-و$ تكون زواياهما المتناظرة
كذلك ويلزم من كون زوايا المثلث $د-ه-ز$ اثبتت مساوية لتطيرها من
المثلث $ا-ح-و$ أن تكون زوايا المثلث $د-ه-ز$ مساوية لزوايا المثلث $ا-ح-و$
كل تطيرتها

فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين اضلاعهما المتناظرة متناسبة زواياهما

المتناظرة

المتناظرة متساوية

• (تنبيهات) •

الأول الزوايا المتساوية من مثلثين أو تارها متناسبة
 الثاني يشاهد من هذه القضية وسابقة أن تساوى الزوايا ملازم لتناسب
 الاضلاع وتناسب الاضلاع ملازم لتساوى الزوايا وأحد هذين الشرطين
 كاف في تشابه المثلثين وليس كذلك في الاشكال المغايرة للمثلث لانه لو نظر الى
 الشكل الرباعي كالرسم في الشكل ١٢١ ورسم الخط ه ه و موازيا
 للضلع ه ح لسكانت كل زاوية من الشكل الرباعي ا ه و د مساوية
 لتطيرتها من الشكل الرباعي ا ب ح د وليست الاضلاع المتناظرة
 متناسبة كما هو واضح من الشكل وكذا يمكن تقارب النقطتين ه و د
 أو تباعدهما بدون تغيير تناسب اضلاع الشكل الرباعي المذكور وهي ا ب
 ح د ه و د ا وبهذا تتغير مقادير الزوايا فتبين بهذا انه يمكن
 في الشكل الرباعي اختلال تناسب الاضلاع بدون تغيير مقادير الزوايا وتغيير
 الزوايا بدون تبديل الاضلاع أعني انه لا يلزم من تناسب الاضلاع تساوى
 الزوايا ولا من تساوى الزوايا تناسب الاضلاع الا في المثلث فقط
 الثالث اهم القضايا في علم الهندسة قضية شكل العروس مع هاتين القضيتين
 لان جميع الاشكال المسطحة المستوية يمكن تقسيمها الى مثلثات وكل مثلث
 يمكن تقسيمه الى مثلثين قائي الزاوية

• (الدعوى العشرون النظرية شكل ١٢٢) •

اذا ساوت زاوية من مثلث تطيرتها من مثلث آخر وكانت الاضلاع المحيطة
 بهاتين الزاويتين متناسبة كان المثلثان متشابهين
 أى اذا كانت الزاوية ا من المثلث ا ب ح مساوية للزاوية د من
 المثلث د ه و وكانت ا ب : د ه :: ا ح : د و يكون المثلث
 ا ب ح مشابها للمثلث د ه و
 (برهانها) ان يقال لو أخذ البعد ا ب = د ه ورسم من النقطة

و مستقيم مثل د ح مواز للضلع ب ج لكانت كل زاوية من المثلث
أ ر ح مساوية لنظيرتها من المثلث أ ب ج كما تقر ذلك في المقالة الاولى
ويلزم من هذا أن يكون

أ ب : أ ر :: أ ج : أ ح والمفروض أن

أ ب : د ه :: أ ج : د و ويلزم من كون

أ ر = د ه أن يكون المثلث الرابع د و = أ ح ويلزم من هذا أن يكون
المثلث أ ر ح مساويا للمثلث د ه و كما تقر ذلك في النظرية السادسة
من المقالة الاولى ويلزم من كون المثلث أ ر ح مشابها للمثلث أ ب ج
أن يكون مساويه وهو المثلث د ه و مشابها للمثلث أ ب ج وهو المطلوب
* (الدعوى الحادية والعشرون النظرية) *

المثلثان اللذان أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة متشابهان لان
المثلثين اللذين بهذه المثابة زواياهما المتناظرة متساوية وقد تقر في النظرية
الثامنة عشر انه اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعهما
المتناظرة فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين أضلاعهما المتناظرة متوازية
أو متعامدة متشابهان وهو المطلوب .

* (الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل ١٢٥) *

اذا وصل من رأس مثلث الى قاعدته خطوط مستقيمة قدر ما يراد فهذه
الخطوط تقسم قاعدة المثلث وماوازاها الى أجزاء متناسبة أى اذا وصل من
رأس مثلث مثل أ ب ج الى قاعدته ب ج خطوط مستقيمة مثل د و
و أ ر الخ فهذه الخطوط تقسم القاعدة ب ج وماوازاها مثل د ه
الى أجزاء متناسبة أعنى يكون

د ل : د و :: ل ك : و ر :: ك ط : ر ح الخ

(برهانها) أن يقال يلزم من كون الخط د ل موازيا للخط ب ج أن تكون
كل زاوية من المثلث أ د ل مساوية لنظيرتها من المثلث أ ب ج ويلزم من
هذا أن يكون

من الاصول الهندسية ٥ : ١١

د : س و :: ا ل : ا و

وأيضاً يلزم من كون الخط ل ك موازياً للخط ر و أن تكون

ا ل : ا و :: ل ك : و ر

ويلزم من اتحاد نسبة ا ل : ا و في هاتين المتناسبتين أن يكون

د ل : س و :: ل ك : و ر

وبمثل هذا يبرهن على أن

ل ك : و ر :: ط ك : ر ح وهكذا

فقد ثبت بهذا أنه كما تنقسم القاعدة س ح في النقط و و ز و ح

يتقسم الخط د ه في النقط ل و ك و ط

فينتج من هذا أنه إذا انقسمت القاعدة س ح الى اقسام متساوية في النقط

و و ز و ح يتقسم الخط د ه في النقط ل و ك و ط الى

أقسام متساوية كذلك

* (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل ١٢٦) *

إذا انزل عمود من رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية على وترها

فاعلم

أولاً أن هذا العمود يقسم المثلث الى مثلثين كلاهما يشابه المثلث

الكل

وثانياً أن كلًا من الضلعين المحيطين بالقائمة يصير وسطاً متناسباً بين وتر القائمة

والقسم المجاور له

وثالثاً أن العمود المنزل من القائمة على الوتر يكون وسطاً متناسباً بين قسمي

الوتر المذكور

أى إذا انزل عمود مثل ا د من رأس الزاوية القائمة ا في المثلث القائم

الزاوية ا - ح على وترها س ح فاعلم

أولاً أن هذا العمود يقسم المثلث ا - ح الى مثلثين ا - د و ا د - ح

كلاهما يشابه المثلث الكل ا - ح

وثانياً أن كلام من الضاعين $ا - و$ $ا ح$ المحيطين بالقائمة يصير وسطاً متناسباً بين وتر القائمة $ح$ والقسم المجاور له $د$ أو $د ح$ وثالثاً أن العمود $ا د$ المنزل من القائمة على الوتر يكون وسطاً متناسباً بين قسبي الوتر المذكور وهما $د$ و $د ح$ (برهان القضية الأولى) أن يقال يلزم من كون الزاوية $ح$ مشتركة في المثلثين $د ا د$ و $د ا ح$ والزاوية $د ا د = د ا ح$ لقيامهما أن تكون الزاوية $د ا د = د ا ح$ وأن يكون المثلث $د ا د$ مشابهاً للمثلث $د ا ح$

وبمثل هذا يبرهن على أن المثلث $د ا د$ يشابه المثلث $د ا ح$ فاذن تكون المثلثات $د ا د$ و $د ا ح$ متشابهة وهو المطلوب (وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من كون المثلث $د ا د$ مشابهاً للمثلث $د ا ح$ أن يكون

$$د : د ا :: ا : د ح \quad (١)$$

وكذا يلزم من كون المثلث $د ا د$ مشابهاً للمثلث $د ا ح$ أن يكون

$$د : د ا :: ا : د ح \quad (٢)$$

فقد ثبت بهذا أن كلام من الضلعين $ا - و$ $ا ح$ المحيطين بالقائمة وسطاً متناسباً بين وتر القائمة والقسم المجاور له وهو المطلوب (وبرهان القضية الثالثة) أن يقال يلزم من كون المثلث $د ا د$ مشابهاً للمثلث $د ا ح$ أن تكون

$$د : د ا :: ا : د ح \quad (٣)$$

يعنى أن العمود $ا د$ وسط متناسب بين قسبي الوتر وهما $د$ و $د ح$ وهو المطلوب

(تنبيه)

حيث ان مسطح الطرفين في كل متناسبة هندسية يشاوي مسطح الوطينين ينتج من التناسبة (١) أن

$$\overline{a} = s \times r$$

ومن المتناسبة (٢) أن

$$\overline{a} = s \times r$$

فلو جمعت هذه الاشياء المتساوية لنتج أن

$$\overline{a} + \overline{a} = \overline{a} + \overline{a} = s \times r + s \times r$$

$$\overline{a} + \overline{a} = (s + s) \times r = 2s \times r$$

فقد ثبت بهذا أن مربع وتر القائمة يساوى مجموع مربعي الضلعين الآخرين وقد أقيم الدليل على صحة هذه الدعوى فيما تقدم بوجه آخر فهذا دليل على أن براهين القضايا الهندسية قطعية اذا النظريات مؤسسة على البديهيات التى لاشك فيها

* (نتيجة شكل ١٢٧) *

ينتج من هذه النظرية انه لو وصل وتران مثل a و a' من أى نقطة من نقط المحيط مثل a الى نهايتى قطره مثل r لكان المثلث الحاد a قائم الزاوية فى a وحينئذ يكون العمود a المنزل من أى نقطة من المحيط على القطر وسطا متناسبا بين قسمنى القطر المذكور وهما s و s' وكذا يكون الوتر a وسطا متناسبا بين القطر r والقسم المجاور له وهو s أعنى يكون

$$\overline{a} = s \times r$$

وأيا يكون الوتر a وسطا متناسبا بين القطر r والقسم المجاور له وهو s أعنى يكون

$$\overline{a} = s \times r$$

ويلزم من هذا أن يكون

$\overline{AB} : \overline{AC} :: \overline{AD} \times \overline{DE} : \overline{DE} \times \overline{DE}$
 فاذا قسم حذا النسبة الثانية على المضروب المشترك الذى هو \overline{DE} آلت
 هذه المناسبة الى هذه

$$\overline{AB} : \overline{AC} :: \overline{AD} : \overline{DE}$$

ولو قورن المربعان \overline{AB} و \overline{AC} لحدث

$$\overline{AB} : \overline{AC} :: \overline{AD} : \overline{DE}$$

وكذا لو قورن المربعان \overline{AD} و \overline{AC} لحدث

$$\overline{AD} : \overline{AC} :: \overline{AD} : \overline{DE}$$

وقد ذكرنا ذلك فى النتيجة الثالثة والرابعة من شكل العروس فلاحاجة
 للاطالة فتأمل

• (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ١٢٨) •

المثلثان اللذان فى أحدهما زاوية مساوية لتظيرتها من الآخر النسبة بينهما
 كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بالزاوية الاولى و مستطيل الضلعين
 المحيطين بتظيرتها أى ان

$$\text{المثلث } \overline{AB} : \text{المثلث } \overline{ADE} :: \overline{AB} \times \overline{AC} : \overline{AD} \times \overline{AE}$$

(برهانها) أن يقال لو وصل الخط \overline{BE} لحدث مثلث \overline{ABE} ارتفاعه
 عين ارتفاع المثلث \overline{ADE} لاشتراكهما فى الرأس \overline{A} واتحاد اتجاه
 القاعدتين \overline{AB} و \overline{AD} ويلزم من هذا ان يكون

$$\overline{AB} : \overline{AE} :: \overline{AB} : \overline{AD}$$

وكذا يلزم من اتحاد الارتفاع فى المثلثين \overline{ABE} و \overline{ADE} أن يكون

$$\overline{AB} : \overline{AE} :: \overline{AC} : \overline{AE}$$

فلو ضربت هاتين النسبتين بالترتيب لحدث

ا-هـ × ا-حـ : ا-هـ × ا-هـ :: ا-بـ × ا-جـ : ا-د × ا-هـ
وبقسمة حتى النسبة الاولى على المضروب المشترك ا-هـ يصير
ا-بـ : ا-جـ : ا-د :: ا-بـ × ا-جـ : ا-د × ا-هـ وهو المطلوب
* (نتيجة) *

ينج من هذه النظرية ان المثلثين المذكورين يكونان متكافئين اذا كان
المستطيل ا-بـ × ا-جـ مساويا للمستطيل ا-د × ا-هـ او اذا كانت
ا-بـ : ا-جـ :: ا-د : ا-هـ وهذا انما يتأتى اذا كان الخط د-هـ
موازيا للخط ا-هـ

* (الدعوى الخامسة والعشرون النظرية شكل ١٢٢)
نسبة المثلثين المتشابهين الى بعضهما ك نسبة مربع ضلع من أحدهما
لمربع نظيره

أى ان المثلث ا-بـ جـ : المثلث د-هـ و :: ا-بـ : د-هـ
(برهانها) أن يقال يلزم من كون المثلث ا-بـ جـ مشابها للمثلث د-هـ و
أن تكون الزاوية ا = د والزاوية ب = هـ والزاوية ج = و
ويلزم من كون الزاوية ا = د أن يكون

ا-بـ : د-هـ :: ا-جـ : د-هـ × د-هـ : د-هـ
كما نقرر ذلك في النظرية المتقدمة وهذه المناسبة يمكن وضعها بهذه الصورة
$$\frac{ا-بـ}{د-هـ} \times \frac{د-هـ}{د-هـ} = \frac{ا-جـ}{د-هـ}$$

ويلزم من كون المثلث ا-بـ جـ مشابها للمثلث د-هـ و ان يكون

$$\frac{ا-بـ}{د-هـ} = \frac{ا-جـ}{د-هـ}$$

فاذن يكون

$$\frac{ا-بـ}{د-هـ} = \frac{ا-جـ}{د-هـ} \times \frac{د-هـ}{د-هـ} = \frac{ا-جـ}{د-هـ}$$

* (تعريف شكل ١٢٩ الثانى) *

كثيرا الاضلاع المتشابه ان شكلان مركبان من مثلثات متشابهة بالتناظر

ومتماثلة الوضع ومتحدة العدد فإذا علم كثير الاضلاع مثل $ا ب ح د ه$ أمكن
دائما رسم شكل آخر يكون مشابها له لانه لو وصل القطران $ا ح$ و $ا د$ من
النقطة $ا$ ومد من نقطة ما مثل $س$ من نقط الضلع $ا ب$ أو من نقط
استقامته $س ح$ موازيا للضلع $س د$ ثم $ح د$ موازيا للضلع $ح د$ ثم
 $د ه$ موازيا للضلع $د ه$ وهكذا يظهر أن الشكلين $ا ب ح د ه$
و $ا ب ح د ه$ مركبان من مثلثات متحدة العدد ومتشابهة ومتماثلة الوضع
* (الدعوى السادسة والعشرون النظرية شكل ١٢٩) *

كثيرا الاضلاع المتشابه ان زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما
المتناظرة متناسبة

(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من تشابه المثلثات المتناظرة أن تكون
الزاوية $ر ح و = س ح ا$
والزاوية $و ح ط = ا ح د$ فاذن تكون الزاوية $ر ح ط = س ح د$
وهكذا

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من تشابه المثلثات المذكورة أن
تكون

$و ر : ا ب :: ر ح : ر ح :: و ح : ا ح :: ح ط : ح د$
 $:: و ط : ا د :: ط ح : د ه :: و ح : ا ح :: و ح : ا ح$

وينتج من تساوى هذه النسب أن

$و ر : ا ب :: ر ح : ر ح :: ح ط : ح د :: ط ح : د ه$
 $:: و ح : ا ح :: و ح : ا ح$ وهو المطلوب

* (تنبيه) *

اعلم أن الاضلاع المتناسبة في كثيرى الاضلاع المتشابهين هي المحيطة بالزوايا
المتساوية ويقال لها اضلاع متناظرة والرؤس المتناظرة هي رؤس الزوايا
المتساوية

* (الدعوى

* (الدعوى السابعة والعشرون النظرية شكل ١٢٩) *

كثيرا الاضلاع اللذان زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما المتناظرة متناسبة متشابهان أعني انهما يتركبان من مثلثات متناظرة متشابهة ومتماثلة الوضع

(برهانها) أن يقال لو وصل من رأسين متناظرين مثل $ا$ و $و$ أقطار مثل $ا ح$ و $ا د$ و $و ع$ و $و ط$ لكان المثلث $ا ح د$ مشابها للمثلث $و ر ع$ لان الزاوية $ا ح د = و ر ع$ بالفرض وأيضا

$ا ب : و ر :: ح د : ر ع$ وقد تقرّر في النظرية الحادية والعشرين أن المثلثين اللذين بهما المماثلة متشابهان ويلزم من تشابههما أن تكون الزاوية $ح ا$ مساوية للزاوية $ر ع و$ فاذا طرحت الزاوية $ح ا$ من الزاوية $ح د$ والزاوية $ر ع و$ من الزاوية $ر ع ط$ المساوية للزاوية $ح د$ كانت الزاوية $ا ح د$ مساوية للزاوية $و ع ط$ اكن حيث أن المثلثين $ا ح د$ و $و ر ع$ متشابهان تكون

$$ا ح : و ع :: ح د : ر ع$$

وقد فرضنا أن

$$ح د : ر ع :: ح د : ع ط$$

فاذن يكون

$$ا ح : و ع :: ح د : ع ط$$

وقد اتضح ان الزاوية $ا ح د = و ع ط$ فاذن يكون المثلث $ا ح د$ مشابها للمثلث $و ع ط$ وبمثل هذا يبرهن على أن المثلث $ا ه د$ مشابه للمثلث $و ع ط$ وكذا البواقي كائنا ما كان عدد الاضلاع في كثيرى الاضلاع المفروضين

* (الدعوى الثامنة والعشرون النظرية شكل ١٢٩) *

النسبة بين محيطى \llcorner كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين

والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي ضلعيه متناظرين
(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من تشابه الشكلين أن يكون
ا - : ور :: ح : رع :: ح د : ح ط الخ
وقد تقر في علم الحساب أن نسبة مجموع المقدمات الى مجموع التاليات
كنسبة أحد المقدمات الى تاليه فاذن يكون

$$ا - + ح - + ح د + الخ : ور + رع + ح ط + الخ :: ا - : ور$$

وحيث ان ا - + ح - + ح د + الخ يساوى محيط الشكل
ا - ح د ه و ور + رع + ح ط + الخ يساوى محيط
الشكل ور ح ط ع ينتج أن
محيط الشكل ا - ح د ه : محيط الشكل ور ح ط ع :: ا - : ور
وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من كون المثلث ا - ح مشابها
للمثلث ور ح أن يكون

$$ا - ح : ور ح :: ا ح : و ح$$

وكذا يلزم من تشابه المثلثين ا ح د و و ح ط ان يكون

$$ا ح د : و ح ط :: ا ح : و ح$$

ويلزم من اشتراك النسبة الثانية في هاتين المتناسبتين أن يكون

$$ا - ح : ور ح :: ا ح د : و ح ط$$

وبمثل هذا يبرهن على أن

ا ح د : و ح ط :: ا ح د : و ح ط
وهكذا على حسب عدد المثلثات
فينتج من تساوى هذه النسب أن مجموع المقدمات الى مجموع التاليات
كنسبة مقدم الى تاليه أى ان

$$ا - ح + ا ح د + ا د ه : ور ح + و ح ط + ح ط ع :: ا - ح : ور ح$$

وحيث

وحيث ان $ا-ح + ا-د + ا-ه$ يساوي الشكل $ا-ح-د-ه$
 و $و-ر-ع + و-ط + و-ط-ه$ يساوي الشكل $و-ر-ع-ط-ه$
 ينتج أن

الشكل $ا-ح-د-ه$: الشكل $و-ر-ع-ط-ه$:: $ا-ح$: $و-ر$
 وقد تقرّر أن

$$ا-ح : و-ر :: ا-ط : و-ط$$

فاذن يكون

الشكل $ا-ح-د-ه$: الشكل $و-ر-ع-ط-ه$:: $ا-ط$: $و-ط$
 وهو المطلوب

* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية انه اذا انشئت ثلاثة اشكال متشابهة اضلاعها المتناظرة
 مساوية لاضلاع مثل قائم الزاوية يكون الشكل المنشأ على الضلع الاكبر
 مساويا لمجموع الشكلين الاخرين لان هذه الاشكال الثلاثة مناسبة
 لاربعات اضلاعها المتناظرة وحيث كان مربع الوتر مساويا لمجموع المربعين
 المنشأين على الضلعين الاخرين ينتج من ذلك ان الشكل المنشأ على الضلع
 الاكبر مساو لمجموع الشكلين الاخرين

* (الدعوى التاسعة والعشرون النظرية شكل ١٣٠) *

الوتران مثل $ا-ح$ و $و-ر$ المتقاطعان في دائرة جزأ احدهما مناسباً
 لعكس جزئى الآخر أعني أن

$$ا-ح : و-ر :: و-ح : ا-ر$$

(برهانها) أن يقال لو وصل $ا-ر$ و $ا-ح$ لكان المثلثان الحادئان
 $ا-ح-ر$ و $و-ر-ح$ متشابهين لان الزاوية $ه$ مشتركة والزاوية $ا = د$
 لوقوعهما في قطعة واحدة والزاوية $و = ط$ كذلك ويلزم من تشابه
 هذين المثلثين أن يكون

ا هـ : د هـ :: ح هـ : ب هـ وهو المطلوب
 * (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية أن

$$ا هـ \times ب هـ = د هـ \times ح هـ$$

والمعنى أن المستطيل المكون من جزءى أحد الوترين يكافئ المستطيل المكون من جزءى الوتر الآخر

* (الدعوى الثلاثون النظرية شكل ١٣١) *

إذا أخذت نقطة مثل هـ خارج الدائرة ومدتها قاطعان مثل هـ ب هـ و هـ ح حتى انتهيا بالقوس المقعر ب هـ ح فالقاطعان الكاملان يكونان مناسبين انعكسى برئيهما الخارجين أعني يكون

$$هـ ب : هـ ح :: هـ د : هـ ا$$

(برهانها) أن يقال لو وصل ا هـ و ب هـ فكان المثلثان الحادثان هـ ا هـ و هـ ب هـ متشابهين لان الزاوية هـ مشتركة والزاوية ب هـ = ح هـ لوقوعهما فى قطعة واحدة وينتج من تشابههما أن

$$هـ ب : هـ ح :: هـ د : هـ ا$$

* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية أن

$$هـ ب \times هـ ح = ا هـ \times ب هـ$$

والمعنى ان المستطيل المكون من أحد القاطعين وجزئه الخارج عن الدائرة يكافئ المستطيل المكون من القاطع الآخر وجزئه كذلك

* (الدعوى الحادية والثلاثون النظرية شكل ١٣١ الثانى)

إذا وجدت أربع نقط مثل ب هـ و د هـ و هـ على مستقيمين متقاطعين مثل ا هـ و ا هـ وكان ا هـ \times ا هـ = ا د \times ا هـ كانت هذه النقط على محيط دائرة واحد

(برهانها) أن يقال لرأى أن المحيط الذى يمر بالنقط ب هـ و د هـ و هـ

يقطع

يقطع الخط $ا هـ$ في نقطة أخرى غير النقطة $هـ$ كالنقطة $م$ منلا للزم أن يكون

$$ا - ا \times ا = ا \times ا م$$

والمفروض أن

$$ا - ا \times ا = ا \times ا هـ$$

فينتج من هاتين المعادلتين أن

$$ا \times ا م = ا \times ا هـ \text{ وهو محال }$$

فان تكون النقطة $هـ$ على المحيط المار بالنقطة $ج$ و $ب$ و $د$ وهو المطلوب

*** (الدعوى الثانية والثلاثون النظرية شكل ١٢٢) ***

إذا أخذت نقطة مثل $هـ$ خارج دائرة ومدتها مماسة مستقيم مماس مثل $هـ ا$ واخر قاطع مثل $هـ ج$ كان المماس وسطا متناسبا بين القاطع وجزئه الخارج أعنى أن

$$هـ ج : هـ ا :: هـ ا : هـ د$$

(برهانها) أن يقال لو وصل المستقيمان $ا د$ و $ا ج$ لكان المثلثان الحادثان $هـ ا د$ و $هـ ا ج$ متشابهين لان الزاوية $هـ$ مشتركة والزاوية $هـ ا د$ الواقعة بين المماس $هـ ا$ والوتر $ا د$ مساوية للزاوية $ج$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$هـ ج : هـ ا :: هـ ا : هـ د \text{ وهو المطلوب}$$

*** (نتيجة) ***

ينتج من هذه النظرية أن مربع الخط المماس يكافئ المستطيل المكون من الخط القاطع ومن جزئه الخارج أعنى أن

$$هـ ا^2 = هـ ج \times هـ د$$

*** (الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية شكل ١٢٣) ***

إذا نصفت زاوية مثلث بمستقيم فالمستطيل المكون من ضلعيها

يساوي المستطيل المكون من قسبي المضلع المقابل لها زائدا مربع المستقيم
المنصف لها

أى اذا نصفت زاوية مثل $\angle A$ من مثلث مثل $\triangle ABC$ بمسـتقيم مثل
 AD كان

$$AB \times AC = AD^2 + DC \times DB$$

(برهانها) أن يقال لو رسم محيط دائرة ماراً برؤس زوايا المثلث $\triangle ABC$ ومد
الخط AD جهة D حتى انتهى الى محيط الدائرة فى نقطة مثل H ووصل
 H الى مكان المثلث الحادث $\triangle AHD$ مشابها للمثلث $\triangle ABC$ لانه يلزم من
كون الزاوية $\angle A$ مساوية للزاوية $\angle A$ بالفرض والزاوية $\angle C$
مساوية للزاوية $\angle H$ لوقوعهما فى قطعة واحدة أن يكون المثلثان
الذكران متشابهين ويلزم من تشابههما أن تكون اضلاعهما المتناظرة
متناسبة أى يكون

$$AB : AH :: AC : AD$$

فينتج من هذه المتناسبة أن

$$AB \times AC = AH \times AD$$

اكن $AD = AE + ED$ فاذا ضرب كل من حدود هذه المعادلة
فى AD يكون

$$AB \times AC = AD^2 + ED \times AD$$

ويلزم من كون

$$AD \times ED = ED \times DB$$

أن يكون

$$AB \times AC = AD^2 + DC \times DB$$

• (الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية شكل ١٣٤) •

المستطيل المكون من ضلعي مثلث يكافئ المستطيل المكون من الارتفاع المنزل
على ضلعه الثالث ومن قطر الدائرة المرسومة على المثلث المذكور

أى ان المستطيل المكون من ضلعين مثل a و a من مثلث مثل
 a b يكافئ المستطيل المكون من الارتفاع a المنزل على ضلعه
 الثالث c ومن قطر الدائرة d المرسومة على المثلث المذكور
 أعنى ان

$$a \times a = a \times b = a \times c = a \times d$$

(برهانها) أن يقال لو وصل a لكان المثلث a b القائم الزاوية
 فى a متشابه للمثلث a b c القائم الزاوية فى a لان الزاوية b
 $= c$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$a : b :: a : c$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$a \times a = a \times b = a \times c = a \times d \quad (1)$$

وهو المطلوب

* (نتيجة) *

اذا ضرب كل من طرفي المعادلة (1) فى c أى الضلع الثالث من
 المثلث حدث

$$a \times a \times c = a \times b \times c = a \times c \times c$$

وحيث ان مساحة المستطيل المكون من a و c تساوى ضعف
 مساحة المثلث a b c بعلم من ذلك انه اذا ضربت اضلاع مثلث فى بعضها
 كان حاصل الضرب مساويا لضعف مساحة المثلث مضروبة فى قطر دائرة
 المحيط المارة برؤسه

واعلم أن حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة يسمى فى بعض الاحيان مساحة
 جسمية وسيأتى بيانه فى المقالة السادسة

* (تنبيه) *

اعلم انه يمكن أن يبرهن أيضا على أن مساحة المثلث تساوى محيطه أى مجموع
 اضلاعه مضروبا فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله انظر (شكل ٨٧ من

(اللوحة ٤)

لان كلامنا ارتفاعات المثلثات $أ ب ح$ و $ب ع د$ و $أ ب د$ المشتركة
في الرأس $ب$ يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث $أ ب د$
فحينئذ يكون مجموع هذه المثلثات مساويا لمجموع القواعد $د ب$ و $د ع$ و $د ح$
و $أ ب$ مضروباً في نصف نصف القطر $ب د$ أى في ربع الفترفة قد ثبت
بهذا أن مساحة المثلث $أ ب د$ تساوى محيطه مضروباً في ربع قطر الدائرة
المرسومة داخله وهو المطلوب

* (الدعوى الخامسة والثلاثون النظرية شكل ١٣٥) *

المستطيل المكون من قطري شكل رباعى مرسوم داخل دائرة يساوى مجموع
مستطيلي اضلاعه المتقابلة أعنى أن

$$أ ب \times د ح = أ د \times ب ح + أ ح \times ب د$$

(برهانها) أن يؤخذ القوس $د ه$ = للقوس $أ د$ ويوصل $د ه$
الذى يقطع القطر $أ ب$ في $و$ فيكون المثلث الحاد $ب د و$ مشابهاً
للمثلث $أ ب د$ لانه يلزم من كون القوس $د ه$ مساوياً للقوس $أ د$
أن تكون الزاوية $د ب ه$ أو $د ب و$ مساوية للزاوية $أ ب د$ وأيضاً
الزاوية $أ د ب$ = $أ د و$ أو $د ب و$ لوقوعهما في قطعة واحدة
فأذن يكون المثلث $ب د و$ مشابهاً للمثلث $أ ب د$ ويلزم من كونهما
متشابهين أن يكون

$$أ د : د ب :: د و : ب د$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$أ د \times ب د = د و \times ب د + د ب \times ب د \quad (١)$$

ولنبرهن الآن على أن المثلث $أ ب د$ و مشابهاً للمثلث $ب د و$ فنقول حيث
كان القوس $أ د$ مساوياً للقوس $د ه$ يكون

$$أ د + د ه = د ب + د ه أى أ ه = د ب$$

فأذن تكون الزاوية $أ ب د$ أو $أ ب و$ مساوية للزاوية $د ب و$

وأيضاً

وأبضا الزاوية $\angle A = \angle D$ لوقوعهما في قطعة واحدة فحينئذ
يكون المثلث ABD ومثابه للمثلث DCD وينتج من تشابههما أن

$$AB : BD :: AD : CD$$

وينتج من هذه النسبة أن

$$AB \times CD = AD \times BD \quad (2)$$

فإذا جمعت هذه المعادلة (٢) الى المعادلة (١) حدث

$$AD \times CD + AB \times CD = AD \times BD + AB \times CD = (AD + AB) \times CD$$

وهو المطلوب

* (الدعوى السادسة والثلاثون النظرية شكل ١٣٥) *

نسبة احد قطري الشكل الرباعي المرسوم داخل دائرة الى قطره الاخر
كنسبة مجموع المستطيلين المكونين من الاضلاع المتصلة المارة بنهايتي القطر
الاول الى مجموع المستطيلين المكونين من الاضلاع المتصلة المارة بنهايتي
القطر الاخر اعني أن

$$AC : BD :: AD \times AB + DC \times CB : AD \times DC + AB \times BC$$

(برهانها) أن يرسم بالضمن نق لنصف قطر الدائرة المرسومة على الشكل ثم
يقال حيث ان الشكل الرباعي $ABCD$ منقسم بالقطر AC الى المثلثين
 ABC و ADC يكون

$$AB \times DC + AD \times CB = AC \times BD \quad (كما تقرر في نتيجة النظرية ٣٤)$$

وأبضا يكون

$$AD \times DC + AB \times CB = AC \times BD$$

وبالجمع يكون

$$AC \times BD = (AD \times DC + AB \times CB) + (AD \times DC + AB \times CB)$$

وحيث ان الشكل الرباعي منقسم بالقطر BD الى المثلثين ABD و BCD يكون

$$BD \times AC = (AB \times DC + AD \times CB) + (AB \times DC + AD \times CB)$$

فحينئذ يكون

$$\begin{aligned} & \alpha \times \beta = (\alpha \times \gamma + \gamma \times \beta) \\ & (\alpha \times \gamma + \gamma \times \beta) \text{ ويلزم من هذا أن يكون } \\ & \alpha : \gamma :: \beta : \gamma \times \beta + \alpha \times \gamma : \alpha \times \beta \\ & + \alpha \times \beta \text{ وهو المطلوب} \end{aligned}$$

• (الدعوى السابعة والثلاثون النظرية شكل ٣ من اللوحة ١٧) •
إذا تساوت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر وكانت إحدى الزاويتين
الباقيتين من المثلث الأول متممة لنظيرتها من المثلث الآخر كانت النسبة
بين الضلعين المقابليين للزاويتين المتساويتين كالنسبة بين الضلعين المقابليين
للزاويتين المتممتين لبعضهما

أي إذا تساوت زاوية مثل $\alpha - \beta$ من مثلث مثل $\alpha - \gamma$ نظيرتها مثل
 $\alpha - \delta$ من مثلث مثل $\alpha - \delta$ وكانت إحدى الزاويتين الباقيتين من
المثلث الأول مثل الزاوية $\alpha - \gamma$ متممة لنظيرتها مثل الزاوية $\alpha - \delta$
يكون

$$\alpha - \gamma : \alpha - \delta :: \alpha - \beta : \alpha - \delta$$

(برهانها) أن يقال لو وضع المثلثان كما هو مبين في (الشكل ٣ من اللوحة
١٧) ومثل الضلع $\alpha - \gamma$ على استقامته جهة γ حتى قطع الضلع $\alpha - \delta$
في و حدث

$$\alpha - \beta : \alpha - \delta :: \alpha - \gamma : \alpha - \delta$$

لأن الخط $\alpha - \delta$ منصف للزاوية $\alpha - \delta$ وقد تقر في النظرية السابعة عشر
أن الخط المنصف للزاوية من مثلث يقسم الضلع المقابل لها إلى قسمين مناسبين
للضلعين المحيطين بها وحيث كانت الزاوية $\alpha - \gamma$ متممة للزاوية $\alpha - \delta$
وللزاوية $\alpha - \delta$ تكون الزاوية $\alpha - \delta$ مساوية للزاوية $\alpha - \delta$ ويلزم من
هذا أن يكون الخط $\alpha - \delta$ موازاً للخط $\alpha - \delta$ كما تقر ذلك في المقالة
الأولى

ويلزم

ويلزم من توازيهما أن تكون الزاوية α و γ مساوية للزاوية α هـ δ
فأذن يكون

$$\alpha : \alpha \text{ هـ} :: \gamma : \delta \text{ هـ}$$

فإذا ضرب كل حد من هذه التناسيب في نظيره من التناسيب السابقة يحدث
 $\alpha \times \alpha : \alpha \times \alpha \text{ هـ} :: \gamma \times \gamma : \delta \times \delta \text{ هـ}$
وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك α وحدى النسبة
الثانية على المضروب المشترك γ يكون

$$\alpha : \alpha \text{ هـ} :: \gamma : \delta \text{ هـ}$$

$$\gamma : \delta \text{ هـ} :: \alpha : \alpha \text{ هـ}$$

* (الدعوى الثامنة والثلاثون النظرية شكل ٤ من اللوحة ١٧) *
إذا تمت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر كانت النسبة بين هذين
المثلثين كالنسبة بين المستطيلين المكونين من الاضلاع المحيطة بالزاويتين
المذكورتين فإذا كانت الزاوية α هـ متممة للزاوية γ هـ يكون
 $\alpha \gamma : \alpha \delta \text{ هـ} :: \alpha \gamma : \alpha \delta \text{ هـ}$
(برهانها) أن يوضع المثلثان كما هو مبين في (الشكل ٤ من اللوحة ١٧)
نتم وصل $\gamma \delta$ فيحدث

$$\alpha \gamma : \gamma \delta :: \alpha \gamma : \alpha \delta \text{ هـ}$$

$$\alpha \gamma : \alpha \delta \text{ هـ} :: \alpha \gamma : \alpha \delta \text{ هـ}$$

فإذا ضربت الحدود المناظرة في بعضها حدث
 $\alpha \gamma \times \alpha \delta : \alpha \delta \times \alpha \gamma :: \alpha \gamma \times \alpha \delta : \alpha \delta \times \alpha \gamma \text{ هـ}$
وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك $\alpha \delta$ يكون
 $\alpha \gamma : \alpha \delta \text{ هـ} :: \alpha \gamma : \alpha \delta \text{ هـ}$
وهو المطلوب

* (الدعوى التاسعة والثلاثون النظرية شكل ٥ من اللوحة ١٧) *
قطر الشكل الرابع المرسوم على الدائرة يتقاطعان في نقطة تقاطع المستقيمين

الموصولين بين نقط تماس اضلاعه المتقابلة

(برهانها) أن يوصل القطر $هـ ر$ والمستقيمان $ا ح$ و $س د$ ثم يبحث
عن النسبة الكائنة بين البعدين $هـ ط$ و $ر ط$ اللذين هما بعدا نقطة
تقاطع المستقيمين $هـ ر$ و $س د$ عن النقطتين $هـ و$ و $ر$ ثم يبحث أيضا
عن النسبة الكائنة بين البعدين $هـ ط$ و $ر ط$ اللذين هما بعدا نقطة
تقاطع المستقيمين $هـ ر$ و $ا ح$ عن النقطتين المذكورتين $هـ و$ و $ر$
بان يقال حيث ان في المثلثين $س ط هـ$ و $د ط ر$ زاوية $س ط هـ =$
زاوية $د ر ط$ وان الزاوية $هـ س ط$ متممة للزاوية $ط د ر$ يكون
 $هـ س : د ر :: هـ ط : ط ر$ (كما تقرر ذلك في النظرية السادسة
والثلاثين)

ويحدث أيضا من المثلثين $ا ط هـ$ و $ح ط ر$ أن

$$ا هـ : ح ر :: هـ ط : ط ر$$

وحيث تقرر في المقالة الثانية أن

$$ا هـ = هـ س و ح ر = د ر$$

يعلم من ذلك أن

$$هـ ط : ط ر :: هـ ط : ط ر$$

وأن النقطة $ط$ هي النقطة $ط$ بعينها وأن القطر $هـ ر$ يمر بنقطة
تقاطع المستقيمين $س د$ و $ا ح$

وبمثل هذا يبرهن على أن القطر $ح و$ يمر أيضا بنقطة تقاطع المستقيمين
المذكورين $س د$ و $ا ح$

فقد ثبت بهذا أن الخطوط المستقيمة الاربعة وهي $هـ ر$ و $ح و$ و $ا ح$
و $س د$ تتقاطع في نقطة واحدة وهو المطلوب

(الدعوى الاربعون النظرية شكل ٦ من اللوحة ١٧)

اذا وقعت نقطة مثل $ح$ على مستقيم معلوم مثل $ا ب$ وكانت $ا ح : ح ب$

م : م : وكانت نقطة أخرى مثل د على استقامته وكان أيضا

ا : س :: م : د

كانت النسبة بين أى مستقيمين وموازين من النقطتين ا و ب الى أى
قطة من نقط المحيط الذى قطره ج د ثابتة ومساوية لنسبة م : ن
(برهانها) أن يقال يلزم من كون

2 : 2 :: 7 - : 7 1 :: 5 - : 5 1

اُن یكون

$$r - s : r + s :: r - s : r + s$$

لانه قد تقرر في علم الحساب أن نسبة مجموع المقدمين الى مجموع التاليين
كنسبة فاضل المقدمين الى فاضل التاليين فاذا رمزنا بالحرف و المركز
الدائرة حدث

۲ ا و : ۲ ح و :: ۲ ح و : ۲ - و :: م : ه

وبقصة سدود النبتين الاولى على ٢ وابدال و بمساويه ك و
تقول هذه المناسبة الى

ا و : کو :: کو : و :: م : ه

فأذن يكون المئات أكو مشايها للمئات ركو ويلزم من تشابههما أن يكون

ا ک : ر ک :: ا و : ک و ا و

ك : د : ك :: م : د وهو المطلوب

* (三) *

ينتج من هذه النظرية انه لو وصل الخط $كـ ح$ لانقسمت الزاوية $اـ كـ$ الى قسمين متساويين ولو وصل الخط $كـ د$ لانقسمت الزاوية $بـ كـ$ الى قسمين متساويين كذلك

• (تنبيهات) •

(التنبيه الأول في تعاريف لازمة)

إذا قسم مستقيم مثل ab الى جزئين مثل a و b - كما في الشكل ٧ من اللوحة ١٧ بأي كيفية كانت - فسمي هذان الجزآن بقسمي المستقيم ab وأيضاً إذا أخذت نقطة مثل d على استقامة ab فالجزآن ad و bd يسميان أيضاً بقسمي المستقيم ab وقسمي الحالة الاولى أي التي فيها نقطة التقسيم موضوعة بين النقطتين a و b يميزان بالقسمين الجمعيين وقسمي الحالة الثانية أي التي فيها النقطة المذكورة على استقامة ab لا بين طرفيه يميزان بالقسمين الطرحيين فلو قسم المستقيم ab في نقطة c بحيث يكون $a : b :: c : d$ ويحصل أيضاً من تعيين النقطة d عليه متناسبة بهذه الصورة $a : d :: b : c$ كان المستقيم ab متوافق التقسيم في النقطتين c و d وكانت النقطتان c و d متوافقتي الاقتران بالنسبة للمستقيم ab ولاشترال هذه النسبة $m : n$ في المتناسبتين السابقتين يكون

$$a : b :: c : d$$

وبتغيير محل الوسطين يكون

$$a : c :: b : d \quad (١)$$

ويعلم من هذه التناسبات أن الخط c متوافق التقسيم أيضاً في النقطتين a و b وأن النقطتين a و b متوافقتا الاقتران في الخط c وإذا سوى حاصل ضرب طرفي التناسبات (١) بحاصل ضرب وسطيهما حدث

$$a \times c = b \times d$$

ويعلم من هذه المعادلة أنه إذا كان المستقيم متوافق التقسيم كان حاصل ضرب الخط الكلي في جزئه المتوسط مساوياً لحاصل ضرب جزئيه المتطرفين

وإذا نظر للخط c الذي هو قطر الدائرة المرسومة في الشكل ٩ من

اللوحة

اللوحة ١٧ يرى انه متوافق التقسيم في النقطتين α و β وأن
النقطتين γ و δ أيضا متوافقتا الاقتران في الخط α -
و بالجملة فالمستقيم المنصف لزاوية مثلث والمستقيم المنصف لجناورها يجعلان
المضلع المقابل لهما متوافق التقسيم

(التنبيه الثاني)

اذا علمت نقطة مثل α على قطر دائرة مثل القطر $\gamma\delta$ (كما في الشكل ٦
من اللوحة ١٧) وكان المطلوب إيجاد النقطة المتوافقة الاقتران بها
في الخط $\gamma\delta$ فطريقة ذلك أن يوصل مستقيمان من نقطة α من المحيط
مثل β الى النقطتين γ و δ ثم تنشأ زاوية $\gamma\beta\epsilon = \alpha\beta\gamma$
فتكون النقطة ϵ متوافقة الاقتران بالنقطة α وبمثل هذه العملية
تتبع النقطة α اذا كانت النقطة ϵ معلومة .

(التنبيه الثالث)

يمكن أيضا إيجاد النقطة ϵ بأن يمد من النقطة α المماس $\alpha\epsilon$ ثم ينزل
من النقطة ϵ عمود على القطر $\gamma\delta$ فيقطع في النقطة المطلوبة
لانه لو وصل $\epsilon\gamma$ لكانت الزاوية $\alpha\epsilon\gamma = \gamma\delta\epsilon$ للزاوية $\alpha\epsilon\gamma$ كما
تقرر ذلك في المقالة الثانية

(الدعوى الحادية والاربعون النظرية شكل ٨ من اللوحة ١٧)
اذا أخذت نقطة مثل γ في مستوى مثلث مثل $\alpha\beta\delta$ وانزل منها عمدة
مثل $\gamma\epsilon$ و $\gamma\zeta$ و $\gamma\eta$ على اضلاعه $\alpha\beta$ و $\beta\delta$ و $\alpha\delta$ -
فكان مجموع مربعات الاجزاء الثلاثة غير المتجاورة مثل $\gamma\epsilon^2 + \gamma\zeta^2 + \gamma\eta^2$
و $\alpha\delta$ مساويا لمجموع مربعات الاجزاء الثلاثة الاخرى $\alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \delta\gamma^2$
و $\alpha\beta$ أعني أن

$$\alpha\delta^2 + \gamma\epsilon^2 + \gamma\zeta^2 + \gamma\eta^2 = \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \delta\gamma^2 + \alpha\beta^2$$

(برهانها) أن يقال لو وصل $\gamma\alpha$ لحدث

$$\overline{ع ه} = \overline{ه أ} + \overline{أ ع} \quad \text{و}$$

$$\overline{ع و} = \overline{و أ} + \overline{أ ع}$$

فينتج من هاتين المعادلتين أن

$$\overline{ع ه} + \overline{ه أ} = \overline{ع و} + \overline{و أ} \dots\dots (١)$$

ولو وصل $\overline{ع - و}$ و $\overline{ع و}$ طرحت أيضا

$$\overline{ع ه} + \overline{ه و} = \overline{ع و} + \overline{و ه} \dots\dots (٢) \quad \text{و}$$

$$\overline{ع د} + \overline{د و} = \overline{ع و} + \overline{و د} \dots\dots (٣)$$

من المعادلة (١) ينتج أن

$$\overline{و أ} = \overline{ع ه} + \overline{ه أ} - \overline{ع و}$$

ومن المعادلة (٢) ينتج أن

$$\overline{ه و} = \overline{ع و} + \overline{و ه} - \overline{ع ه}$$

ومن المعادلة (٣) ينتج أن

$$\overline{د و} = \overline{ع و} + \overline{و د} - \overline{ع د}$$

فلو جمعت هذه المعادلات الثلاث بالترتيب واختصرت حدود حاصل الجمع
لحدث

$$\overline{ع ه} + \overline{ه و} + \overline{و د} = \overline{و أ} + \overline{ه أ} + \overline{د و} \quad \text{وهو المطلوب}$$

وبمثل هذا يبرهن على أن هذه النظرية صحيحة ولو كانت النقطة $ع$ خارجة

عن المثلث (كما هو مبين في الشكل ٨ الثاني من اللوحة ١٧)

• (تنبيهان) •

الاول اذا قسمت اضلاع مثلث في النقط $د$ و $ه$ و $و$ وكان

$$\overline{ع ه} + \overline{ه و} + \overline{و د} = \overline{و أ} + \overline{ه أ} + \overline{د و}$$

فلا عدة

فالأعمدة القائمة على اضلاع المثلث من النقط د و ه و و تتقاطع في نقطة واحدة

لأنه ان قيل قد لا تتقاطع في نقطة واحدة يقال لو انزل من النقطة ح التي هي تقاطع العمودين د و ح ه عمود على ا - لقطعه في و ويلزم من هذا أن يكون

$$\overline{د ه} + \overline{د و} + \overline{ا و} = \overline{ا ه} + \overline{ا د} + \overline{د و}$$

فلو طرحنا هذه المعادلة من المعادلة المفروضة لحدث

$$\overline{ا و} - \overline{ا و} = \overline{د و} - \overline{د و} \text{ أو } ٠ = ٠$$

$$\overline{ا و} + \overline{د و} = \overline{ا و} + \overline{د و}$$

وهذه معادلة محالة لان ا و أصغر من ا و و د أصغر من د و
* (التنبية الثاني) *

اعلم أن هذه النظرية يمكن تطبيقها على الشكل الرابع وعلى أى مضلع مستو وأما ما ذكر في التنبية الاول فلا يتأتى الا في المثلث فقط

* (الدعوى الثانية والاربعون النظرية شكل ٩ من اللوحة ١٧) *
اذا قطع مثلث مثل ا - ب - ج بقاطع مثل د ه حدث

$$ا د \times ب د \times ج ه = د و \times د ه \times ا ه$$

(برهانها) أن يقال لو مت من النقطة د مستقيم مثل د - ه يوازي ا ب لحدث

$$ا د : د و :: ا ه : د ه$$

$$ب د : د و :: ب ه : د ه$$

وقد تقرر في علم الحساب انه اذا ضربت حدود متناسبة هندسية في نظائرها من متناسبة أخرى كانت الحواصل الناتجة متناسبة فاذن يكون

$$ا د \times ب د : د و \times د ه :: ا ه \times ب ه : د ه \times د ه$$

وبقصة حذى النسبة الثانية على المضروب المشترك - ثمة يكون

$$ا \times س : د \times و :: ا ه : ح ه$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$ا \times س \times د = ح ه \times و \times د \times ا ه$$

وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن هذه النظرية صحيحة ولو قطع ه و امتدادات الاضلاع ا ح

و ح - و ا - وليس هناك حالة أخرى

(الدعوى اشالة والاربعون النظرية شكل ١٠ من اللوحة ١٧)

إذا أخذت نقطة مثل ح في مستوى مثلث مثل ا - ح ووصل منها

لرؤسه ا و - و ح خطوط مستقيمة ح ا و ح - و ح ح

ومدت حتى قطعت اضلاع المثلث في نقط مثل د و ه و و حدث

$$ا \times س \times د = ح ه \times و \times د \times ا ه$$

(برهانها) أن يقال يلزم من كون المثلث ا - د متطوعا بالقاطع ح ح و

أن يكون

$$ا \times س \times ح = د \times ح \times ا ه$$

ومن كون المثلث ا د ح مقطوعا بالقاطع - ح ه أن يكون

$$ح ه \times س \times د = ا ه \times ح \times د \times ح$$

فلو ضربت هاتان المعادلتان واختصرت حدود حاصل الضرب لحدث

$$ا \times س \times د = ح ه \times و \times د \times ا ه$$

وهو المطلوب

(تنبيهان)

الاول يمكن أن يبرهن على صحة هذه النظرية بطرق أخرى لا نبني على النظرية

السابقة

وبيان ذلك أن يقال لو مد من النقطة ه مستقيم ه - وازى - ح

ومستقيم

ومستقيم هـ ك يوازي ا ب لحدث عنهما متناسبات وحيث كان

للمثلثين ا ب د و ا د ح ارتفاع مشترك يكون

$$س : ا ب د :: ا د ح :: س د : د ح$$

ويلزم من اشتراك الارتفاع في المثلثين س ح د و د ح د أن يكون

$$س ح د :: د ح د :: س د : د ح$$

فينتج من ذلك أن

$$ا ح د :: ا ح د :: س د : د ح$$

وبمثل هذا يبرهن على أن

$$س ح د :: ا ح د :: س د : د ح$$

$$ا ح د :: س ح د :: ا د ح :: ا د : د ح$$

فلوضربت حدود هذه المتناسبات بالترتيب لحدث

$$ا ح د \times س ح د \times ا د ح :: ا ح د \times ا ح د \times س د : د ح \times س ح د \times ا د ح$$

$$:: س د \times س ح د \times ا د ح :: ا د \times د ح \times ا د ح \times ا د ح$$

$$\text{ويلزم من كون } ا ح د \times س ح د \times ا د ح = ا ح د \times ا ح د \times س د$$

$$\times س ح د \times ا د ح \text{ أن يكون}$$

$$س د \times س ح د \times ا د ح = ا د \times د ح \times ا د ح$$

وهو المطلوب

• (التنبية الثاني) •

اعلم أن هذه النظرية صحيحة ولو كانت النقطة ح خارجة عن المثلث

وفي هذه الحالة توجد احدى نقط التقاطع على أحد اضلاع المثلث والنقطة ا ب

الاخرى ا ب على امتداد الضلعين الاخرين كما هو مبين في الشكل ١٠

الثاني و ١٠ الثالث من اللوحة ١٧

• (الدعوى الرابعة والاربعون النظرية) •

اذا قسمت اضلاع مثلث بثلاث نقط وكان حاصل ضرب الاجزاء الثلاثة غير

المتجاورة مساويا لحاصل ضرب الاجزاء الثلاثة الاخرى كانت النقاط الثلاث

على مستقيم واحد واذا وصل من تلك النقطة الى رؤس المثلث خطوط مستقيمة تقاطعت هذه الخطوط في نقطة واحدة فالخاصية الاولى تقع عند ما يكون عدد النقط المفروضة على اضلاع المثلث عددا زوجيا وعدد النقط المفروضة على امتداداتها عددا فرديا والخاصية الثانية تقع عند ما يكون عدد النقط المفروضة على اضلاع المثلث عددا فرديا وعدد النقط المفروضة على امتداداتها عددا زوجيا

(وبرهان) هذه النظرية كما قرر في النظرية الحادية والاربعة فتأمل

* (تنبيهان) *

الاول اعلم أن السبب الموجب لتقرير هذه النظريات هنا هو كثرة استعمالها في البرهنة على كثير من النظريات المهمة وحل كثير من العمليات

* (التنبيه الثاني) *

اعلم أن من النظريات المقررة في ملحقات المقالة الاولى ما يمكن البرهنة عليه بواسطة ما تقرر في التنبيه الاول من النظرية الحادية والاربعة وهي نظرية ٣٣ ونظرية ٣٤ ومنها ما يمكن البرهنة عليه بواسطة النظرية الرابعة والاربعة التي نحن بصدد ها وهي نظرية ٣٢ ونظرية ٣٥ لكن المقصود من وضع النظريات في الملحقات البرهنة عليها بواسطة نظريات مقررة في مقالة تلك الملحقات فقط

* (الدعوى الخامسة والاربعون النظرية شكل ١١ من اللوحة ١٧) *

اذا أخرجت أربعة خطوط مستقيمة مثل a و b و c و d من نقطة واحدة مثل a وقطعت مستقيما مثل b في نقط مثل

a و b و c و d وكان

$a : b :: c : d$

فهذه الخطوط تقسم أي خط مستقيم قطعتة الى أقسام توافقية سواء كان

ذلك الخط موازيا للخط a أو غير مواز له مثل b بحيث يكون

$a : b :: c : d$

(برهانها)

(برهانها) أن يقال اذا كان القاطع الثاني موازياً للقاطع الاول - هـ
كانت النظرية واضحة وأما اذا كان القاطع الثاني كيفما اتفق مثل - هـ
فيقال لو مئمن النقطة - مستقيم مثل - صه يوازي ا ح ومدة
من الجهتين حتى لاقى هـ ا في - و ا د في - صه حدث

$$\begin{aligned} & - س : ا ح :: - هـ : ح هـ \quad و \\ & - صه : ا ح :: - د : ح د \quad والمفروض أن \\ & - هـ : ح هـ :: - د : ح د \end{aligned}$$

فينتج من هذه التناسبات أن - صه = - د

ويلزم من كون الخط - صه موازياً للخط ا ح أن يكون

$$\begin{aligned} & - س : ا ح :: - هـ : ح هـ \quad و \\ & - صه : ا ح :: - د : ح د \end{aligned}$$

ويلزم من كون - س = - صه أن يكون

$$- هـ : ح هـ :: - د : ح د$$

وهو المطلوب

واعلم أن الخطوط المستقيمة الاربعة وهي ا ب و ا ح و ا د و ا هـ
تكون ما يسمى بالحزمة التوافقية والمستقيمين ا ب و ا ح يسميان خطين
اقترايين بالنسبة للخطين ا د و ا هـ وكذا عكسه

(تنبيهان) *

الاول اعلم انه يتكون حزمة توافقية من الخطوط المستقيمة الاربعة وهي
ا ب و ا ح و ا د و ا هـ اذا كان البعد المحصور بين النقطة -
ونقطة تلاقي المستقيم ا د بالمستقيم المار بالنقطة - والموازي للمستقيم
ا ح مساوياً للبعد المحصور بين النقطة - ونقطة تلاقي الموازي المذكور
بالمستقيم ا هـ أي اذا كان - صه = - سه يتكون من الخطوط
الاربعة وهي ا ب و ا ح و ا د و ا هـ حزمة توافقية لانه قد تقرر أن

* (تنبيهان) *

الاول اذا مـ من النقطة ح بجهة خطوط مستقيمة ووصلت اقطارا الاشكال الرباعية المتحصلة كانت نقط تقاطع تلك الاقطار على خط مستقيم واحد هو المستقيم الاقتراني للنقطة ح بالنسبة للخطين ا - و ا ح الثاني حين تكون النقطة المعلومه ح خارجة عن الزاوية يكون المستقيم الاقتراني داخلها وحين تكون النقطة ح داخلها يكون المستقيم الاقتراني خارجها

• (الدعوى السابعة والاربعون النظرية) •

* (شكل ١٣ من اللوحة ١٧) *

اذا اخذت نقطة مثل ا في مستوى دائرة ومـ منها قواطع مثل ا - ح ومـ من نهايتي \parallel كل وتر حاصل من تلك القواطع كانهاتين - و ح مستقيمان مماسان لمحيط الدائرة مثل - د و ح د المتقاطعين في د فجميع النقط المتحصلة بالكيفية التي تحصلت بها النقطة د تكون على مستقيم واحد

(برهانها) أن يقال لو وصل الفطر ا ح وأنزل من النقطة د العمود د ه على القطر ا ح لكأت النقط الثلاث وهي - و ح و ه على محيط الدائرة الذي قطره د ح فاذن يكون

$$ا - ح \times ا ه = ا ح \times ا ح$$

ولو فرض أنه مـ من النقطة ا مستقيم قاطع للمحيط في نقطتين د من احدهما - و رمز الاخرى ح تحصل أيضا

$$ا - ح \times ا ح = ا ح \times ا ه$$

و (هـ) رمز موقع العمود المنزل على ا ح من نقطة تقاطع مماسين اخرين وقد تقرر في النظرية الثلاثين أن

$$ا - ح \times ا ح = ا ب \times ا ح \text{ فاذن يكون}$$

أه = أه و يعلم من ذلك أن موقع العمود المنزل على أ ح من نقطة تقاطع المماسين الجديدين يقع في النقطة ه ه فثبت أن جميع النقاط التي مثل د تكون على العمود المقام على القطر أ ح من النقطة ه التي تعين بهذا الارتباط

$$\frac{أه}{أح} = \frac{أه}{أح} = \frac{أه}{أح}$$

و أك هو المماس الممتد من النقطة ك أي أن بعد النقطة ه عن النقطة أ يساوي الثالث المتناسب مع الخطين أ ح و أك
* (تنبيهات) *

الاول حين تكون النقطة المفروضة أ خارجة عن الدائرة يقطع الخط د ه هذه الدائرة وحين تكون النقطة أ داخل الدائرة يكون الخط د ه خارجها

الثاني اعلم أن النقطة ك التي هي نقطة تماس الدائرة بالمماس الممتد من النقطة أ تكون على المستقيم د ه لان بعد النقطة أ عن موقع العمود المنزل من النقطة ك على أ ح هو أيضا ثالث متناسب مع المستقيمين أ ح و أك

الثالث يقتضي التنبيه الثالث من النظرية الاربعين يكون القطر د ه متوافق القسمة في النقطتين أ و ه

الرابع الوتر د ه متوافق القسمة أيضا في النقطتين أ و ه لانه لو وصل د ه و ه ه لحدث

$$أ د : د ه :: أ ه : ه ه$$

$$أ ب : ب ه :: أ ه : ه ه$$

فينتج من هاتين المناسبتين أن

$$أ د : د ه :: أ ب : ب ه$$

$$أ د : أ ب :: د ه : ب ه$$

فيعلم من ذلك أن أه هو الخط المنصف للزاوية د ه ه المقسمة للزاوية

هـ هـ فاذن يكون العمود د هـ منصف الزاوية هـ هـ هـ ويلزم من هذا أن يكون هـ متوافق القسمة في النقطتين ا و هـ وهو المطلوب

* (الدعوى الثامنة والاربعون النظرية) *

* (شكل ١٤ من اللوحة ١٧) *

إذا أخذت نقطة مثل ا في مستوى دائرة ومدة منها قواطع مثل ا-ح و ا-د ثم وصل هـ هـ و هـ هـ فنقط التقاطع التي مثل هـ هـ أي التي تحصل من أخذ هذه الخطوط مثنى تكون على مستقيم واحد

(برهانها) أن يقال فوعد من النقط هـ هـ و هـ هـ و هـ هـ خطوط مستقيمة مماسة للدائرة ووصل هـ هـ للزم أن تكون النقطة هـ هـ على المستقيم هـ هـ كما تقرر ذلك في النظرية التاسعة والثلاثين

وقد تقرر في النظرية السابقة انه اذا مدت قواطع آخر كان المستقيم الموصول بين نقط تقاطع المماسات الجديدة هو هـ هـ بعينه وكانت نقطة التقاطع

هـ الحادثة من الخطوط المستقيمة التي مثل هـ هـ و هـ هـ على هـ هـ هـ دائما فاذن تكون النقط التي مثل هـ هـ على خط مستقيم وهو المطلوب

واعلم أن المستقيم الذي يصل بين النقطتين هـ هـ و هـ هـ يقطع الذي يصل بين النقطتين هـ هـ و هـ هـ في نقطة من المستقيم هـ هـ بعينه ويبرهن على ذلك بما ذكر

* (تنبيهات) *

الاول حين تكون النقطة المعلومة خارجة عن الدائرة يكون الخط الذي يشتمل على جميع النقط التي مثل هـ هـ قاطعا للدائرة وحين تكون النقطة المعلومة داخل الدائرة يكون المستقيم المذكور خارجها

الثاني اعلم أن الخط المستقيم والنقطة اللذين سمينا هـ هـ في النظرية ٤٥ و ٤٦ و ٤٧ و ٤٨ بالخط الاقتراني والنقطة الاقترانية هما المسميان

عند بعض المؤلفين بالقطين العكسيين ولهذين القطين خواص أخرى مهمة
 جدا مشروحة في الدروس الهندسية التي ألّفها المهندس بويليير
 الثالث اعلم أن السبب الموجب لتقرير هذه النظريات عقب المقالة الثالثة
 هو أن كثيرا من المسائل المقررة في المحطات يتوقف حلها عليها

• (في الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الثالثة) •

• (الدعوى الاولى العملية) •

شكل ١٢٧ الاول والثاني والثالث و ١٢٨ الاول والثاني والثالث
اذا كان المطلوب تقسيم مستقيم محدود مثل المستقيم AB الى اقسام
متساوية قدر ما يراد فلذلك طرق

• (الطريقة الاولى) •

ان يرسم من احدى نهايتي الخط مستقيم غير محدود مثل AL يصنع مع
المستقيم المعلوم زاوية تمام مثل LAB ثم يؤخذ من المستقيم AL بعد
كيف اتفق مثل AC ويكرّر على المستقيم AL بقدر عدد الاقسام المطلوبة
ثم يوصل مستقيم بين نهاية القسم الاخير ونهاية الاخرى من المستقيم المعلوم
ويرسم من النقطة C مستقيم مواز لـ AL فيقع على المستقيم المعلوم قسم
مثل AE يساوي أحد الاقسام المطلوبة

فاذا كان المطلوب تقسيم المستقيم AB الى خمسة اقسام متساوية مثلاً
يكرّر البعد AC على المستقيم AL خمس مرات أى يؤخذ البعد C
 $= CA$ والبعد $CD = AC$ و $DE = AC$ و $EF = AC$ و $FG = AC$
ثم يوصل المستقيم FL ويرسم من النقطة C مستقيم CH يوازي
 FL فيكون $AE = \frac{AB}{5}$

وهذه الطريقة مؤسسة على النظرية الخامسة عشر

• (الطريقة الثانية شكل ١٢٧ الثاني) •

ان يرسم من النهاية A مستقيم غير محدود مثل AL يصنع مع المستقيم
المعلوم AB زاوية ما ثم يرسم من النهاية B مستقيم آخر غير محدود

كذلك مثل BL يوازي المستقيم AL ويضاده في الاتجاه بحيث يصنعان
مع المستقيم AB زاويتين متبادلتين داخليتين متساويتين ثم يؤخذ بعد كيف
اتفق مثل AC ويوضع على AL بالابتداء من النهاية A وعلى المستقيم

سـ بالابتداء من سـ ويكثر خمس مرات على كليهما

أى يؤخذ د = ح ا و هـ د = د ح و هـ د = هـ د و سـ د
 = وهـ ثم يؤخذ هـ د = و سـ و هـ د = هـ د و هـ د = هـ د
 و آ = ح د ثم يوصل ا ا و ح ح و د د و هـ د و و و سـ
 فينقسم المستقيم المعلوم ا ب الى خمسة أقسام متساوية أعني ان أقسام ا ب
 و ح ط و ط ع و ع ك و ك سـ متساوية وهذه الطريقة
 أحسن من الاولى وأكثرها استعمالا

(الطريقة الثالثة شكل ١٣٧ الثالث)

ان يرسم على المستقيم المعلوم ا ب مثلث متساوى الاضلاع مثل ح ا بـ
 ويؤخذ على أحد اضلاعه مثل ا ح بعد كيف اتفق مثل د و عـ د ح ا
 على استقامة جهة ا (ان احتيج لهذه) ويكثر د ح خمس مرات أى
 يؤخذ البعد ح ا = د هـ د ثم يرسم على ح ا مثلث متساوى
 الاضلاع ح ا بـ ويؤخذ البعد ح ا = د هـ والبعد ط ح = ح ا
 و ع ط = ط ح و ك ع = ع ط ثم يوصل ح ع و ح ط
 و ح ك و ح ك فينقسم الخط ا ب الى خمسة أقسام متساوية وهى
 ح ع و ع ط و ط ك و ك سـ و ك سـ
 لانه قد تقرر فى النظرية الثانية والعشرين انه اذا وصل من رأس مثلث الى
 قاعدته خطوط مستقيمة قدر ما يراد فهذه الخطوط تقسم قاعدة المثلث وما
 وازاها الى أجزاء متساوية وانه اذا انقسمت القاعدة الى أجزاء متساوية
 ينقسم ما وازاها الى أجزاء متساوية

واذا كان المطلوب تقسيم المستقيم ا ب الى أقسام مناسبة لا طول
 معلومة مثل د و م و لـ فلذلك طريقتان

(الطريقة

• (الطريقة الاولى شكل ١٣٨) •

أن يرسم من النقطة $ا$ مستقيم غير محدود مثل $ا د$ يصنع مع المستقيم
المعلوم زاوية ما ثم يؤخذ عليه بعد $ا د = ك$ وبعد $د ز = م$
وبعد $د ه = ل$ ويوصل $ه ب$ ثم يرسم من النقطة $د$ مستقيم $د و$
يوازي $ه ب$ ويرسم من النقطة $د$ مستقيم $د ح$ يوازي $ه ب$
فينقسم المستقيم $ا ب$ الى الاقسام المطلوبة
لانه يلزم من كون الخطين $ا ب$ و $ا ه$ مقطوعين بالتوازيات $د ح$
و $د و$ و $ه ب$ أن يكون

$$ا ح : ا د :: ح و : د و :: د ز : د ه$$

كما نقر ذلك في النظرية الخامسة عشر

وحيث كان $ا د = ك$ و $د ز = م$ و $د ه = ل$ يكون
 $ا ح : ك :: ح و : م :: د ز : ل$ وهو المطلوب

• (الطريقة الثانية شكل ١٣٨ الثالث) •

ان يرسم من النهاية $ا$ مستقيم غير محدود مثل $ا ر$ يصنع مع المستقيم
المعلوم $ا ب$ زاوية ما ثم يرسم من النهاية $ب$ مستقيم يوازي $ا د$ ويضاده
ثم يؤخذ البعد $ا د = ك$ والبعد $د ز = م$ والبعد $د ه = ل$
ويؤخذ أيضا البعد $ب د = ز$ والبعد $د ح = و$
 $م = و$ والبعد $ح آ = ا د = ك$ ثم يوصل $ا آ$ و $د و$ و $د ز$
و $ه ب$ فتكون الاقسام المطلوبة هي $ا ح$ و $ح و$ و $د و$ وهذه
الطريقة مختارة عن سابقتها

• (تنبيه) •

اذا علم مستقيم محدود مثل $ا ب$ وكان المطلوب تقسيمه الى قسمين نسبة
أحدهما الى الآخر كنسبة طول معلوم مثل $م$ الى طول آخر معلوم
كذلك مثل $ك$ فطريقة ذلك أن يرسم من النقطة $ا$ مستقيم غير محدود

مثل ١١ كما في الشكل ١٣٨ الثاني ويؤخذ عليه $ا = م$ ثم يرسم من النقطة $ـ$ مستقيم غير محدود مثل $ـك$ وعليه يؤخذ $ـح = د$ ثم يوصل $ـح$ فينقسم المستقيم $اـ$ في النقطة $ح$ الى القسمين المطلوبين اعني أن

$$ا ح : ح ـ :: م : د$$

لانه يلزم من كون الزاوية $ا = ـ$ و $ا ح د = ـ ح د$ أن تكون الزاوية $ا ح د = ـ ح د$ وأن يكون المثلث $ا ح د$ مشابه للمثلث $ـ ح د$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$ا ح : ح ـ :: ا د : د ـ$$

وحيث كان $ا د = م$ و $ـ د = د$ يكون
 $ا ح : ح ـ :: م : د$ وهو المطلوب
 * (مثالان) *

* (المثال الاول) *

أن يكون المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى ثلاثة أجزاء مناسبة لثلاثة أعداد مفروضة مثل ٢ و ٣ و ٤ فالطريقة أن يقسم المستقيم المعلوم الى أجزاء متساوية عددها $٢ + ٣ + ٤ = ٩$ أي يقسم الى أجزاء متساوية عددها يساوي مجموع الاعداد المفروضة ثم يؤخذ القسم الاول مع اشائي لتكوين الجزء الاول من الاجزاء المطلوبة ويؤخذ القسم الثالث والرابع والخامس لتكوين الجزء الثاني وما بقى من الخط يكون هو الجزء الثالث
 * (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب ايجاد حاصل ضرب مستقيم محدود في كسر معين كالكسر $\frac{٧}{٣}$

فأطريقة أن يقسم المستقيم المعلوم الى ثلاثة أقسام متساوية ويكزراً حدة
تلك الاقسام سبع مرات فيحصل المطلوب
• (الدعوى الثانية العمالية) •

• (شكل ١٢٩ الاول والثاني والثالث) •

اذا علمت ثلاثة خطوط مستقيمة مثل a و b و c وكان المطلوب
ايجاد مستقيم يكون رابعاً متناسباً مع الخطوط المعروفة فذلك طرق
• (الطريقة الاولى) •

أن ترسم زاوية مثل $هـ د و$ ثم يؤخذ على $د هـ$ البعد $د ر$ والبعـ
 $د ح = د و$ وعلى $د و$ يؤخذ $د ع = د و$ ثم يرسم من النقطة
 $ح$ مستقيم مثل $ح ط$ يوازي $ر ع$ فيكون $ط$ هو الرابع المناسب
المطلوب

لانه يلزم من كون الخط $ح ط$ موازياً للخط $ر ع$ أن يكون

$$د ر : د ح :: د ع : د ط$$

وحيث كان $د ر = ا$ و $د ح = ب$ و $د ع = ج$ فيكون

$$ا : ب :: ب : ج$$

$$ا : ب :: ب : ج$$

فاذن يكون $ج ط = د ط$ وهو المطلوب

• (الطريقة الثانية شكل ١٢٩ الثاني) •

أن ترسم زاوية مثل $هـ د و$ ثم يؤخذ على $د هـ$ البعد $د ر$
البعـ $د ح$ ويجانبه $د ع = د و$ ويؤخذ على $د و$ البعد $د ع = د و$
ثم يوصل $ر ع$ ويرسم من النقطة $ح$ مستقيم $ح ط$ يوازي $ر ع$
فيكون $ط$ هو الرابع المناسب المطلوب

لانه يلزم من كون الخط $ر ع$ موازياً للخط $ح ط$ أن يكون

$$د ر : د ح :: د ع : د ط$$

وحيث كان $د ر = ا$ و $د ح = ب$ و $د ع = ج$ فيكون

$$ا : ب :: ب : ج$$

$$ا : ب :: د : هـ$$

فأذن يكون $س = ط$ وهو المطلوب

• (الطريقة الثالثة شكل ١٣٩ الثالث) •

أن يرسم مستقيم غير محدود مثل $د هـ$ ثم يؤخذ عليه البعد $د ر =$
 $و د ع =$ ثم يرسم من النقطة $ر$ مستقيم غير محدود مثل $ر ك$
 يصنع مع المستقيم $د هـ$ زاوية ما ثم يؤخذ البعد $ر ع = د هـ$ ثم يوصل
 $د$ ويمتد من النقطة $ع$ مستقيم مثل $ح ط$ يوازي $ر ع$ فيكون
 $ح ط$ هو الرابع المتناسب المطلوب

لأنه يلزم من كون الخط $ح ط$ موازاً للخط $ر ع$ أن يكون

$$د ر : د ع :: ر ع : ح ط$$

وحيث كان $د ر = ا$ و $د ع = ب$ و $ر ع = د$ يكون

$$ا : ب :: د : ح ط$$

$$ا : ب :: د : هـ$$

فأذن يكون $س = ح ط$ وهو المطلوب

• (أمثلة) •

• (المثال الأول) •

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم بحيث تكون مساحته
 مساوية لمساحة مستطيل معلوم فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف $و$ لقاعدة
 المستطيل المعلوم وبالحرف $ع$ لارتفاعه وبالحرف $ق$ للخط المعلوم
 الذي يفرض قاعدة للمستطيل المطلوب وبالحرف $س$ لارتفاعه ثم يمتد
 حيث أن كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه
 يكون

$$م = و \times ع \quad و م = ق \times س$$

وحيث كان المطلوب أن يكون $م = م$ يلزم أن يكون

$$و \times ع$$

$$ق \times ع = ق \times م$$

وقد نقر في علم الحساب انه اذا كان حاصل ضرب كيتين مساويا لحاصل ضرب كيتين يتركب من الكميات الاربع متناسبة عندسبة طرفاها كيتا أحد الحاصلين ووسطاها كيتا الحاصل الاخر فاذن يكون

$$ق : ق :: ع : م$$

فيعلم من هذه التناسبة أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المتناسب الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي ق و ق و ع فاذا اجريت عملية استخراجها لم يبق الا عملية انشاء المستطيل الذي علم كل من قاعدته وارتفاعه وقد ذكرنا عملية ذلك في الدعوى الثانية عشر العملية من المقالة الثانية

• (المثال الثاني) •

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم تكون مساحته مساوية لمساحة مثل مفروض فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف م للمثلث المفروض وبالحرف ق اقبعده وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف م للمستطيل المطلوب وبالحرف ق لارتفاعه المساوية للخط المعلوم وبالحرف م لارتفاعه المطلوب ثم يقال حيث ان كل مثل مساحته تساوي حاصل ضرب قاعدته في نصف ارتفاعه وكل مستطيل مساحته تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه يكون

$$م = ق \times \frac{1}{2} ع \text{ و } م = ق \times م$$

وحيث كان المطلوب أن يكون م = م يلزم أن يكون

$$ق \times \frac{1}{2} ع = ق \times م$$

وهذه تساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$ق : ق :: \frac{1}{2} ع : م$$

فيعلم من هذه التناسبات أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المناسب

الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي $ق$ و $و$ و $\frac{1}{r} ع$
 • (المثال الثالث) •

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم يكافئ شبه منحرف مفروضاً
 بطريقة ذلك أن يرمز بالحرف $م$ مساحة شبه المنحرف المفروض
 وبالحرف $ص$ لقاعدته الصغرى وبالحرف $ك$ لقاعدته الكبرى
 وبالحرف $ع$ لارتفاعه وبالحرف $م$ لمساحة المستطيل المطلوب
 وبالحرف $ق$ للخط المعلوم الذي يفرض قاعدته وبالحرف $س$ لارتفاعه
 المطلوب ثم يقال حيث أن كل شبه منحرف مساحته تساوي حاصل ضرب
 نصف مجموع قاعدتيه المتوازيين في ارتفاعه وكل مستطيل مساحته تساوي
 حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه يكون

$$م = \frac{1}{r} (ص + ك) \times ع \quad و$$

$$م = ق \times س$$

وحيث كان المطلوب أن يكون $م = م$ يلزم أن يكون

$$\frac{1}{r} (ص + ك) \times ع = ق \times س$$

وهذه التساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$ق : \frac{1}{r} (ص + ك) :: ع : س$$

فيعلم من هذه التناسبات أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المناسب
 الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي

$$ق \quad و \quad \frac{1}{r} (ص + ك) \quad ع$$

• (المثال الرابع) •

أن يكون المطلوب انشاء مثلث على قاعدة معلومة يكافئ مثلثاً مفروضاً
 بطريقة ذلك أن يرمز بالحرف $م$ لمساحة المثلث المعلوم وبالحرف $و$

لقاعدته وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف م لمساحة المثلث المطلوب
وبالحرف ق قاعدته المعلومة وبالحرف س لارتفاعه المطلوب
ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف
ارتفاعه يكون

$$م = ق \times \frac{1}{2} ع \text{ و } م = ق \times \frac{1}{2} س$$

وحيث كان المطلوب أن يكون $م = م$ يلزم أن يكون

$$ق \times \frac{1}{2} ع = ق \times \frac{1}{2} س$$

وهذه المتساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$ق : ق :: \frac{1}{2} ع : \frac{1}{2} س \text{ أو}$$

$$ق : ق :: ع : س$$

فيعلم من هذه المناسبة ان ارتفاع المثلث المطلوب هو الرابع المتناسب

الهندسى للخطوط الثلاثة المعلومة التى هى ق و ع و س

• (الدعوى الثالثة العملية شكل ١٢٧ الثانى) •

اذا علم خطان مستقيمان مثل م و ك وكان المطلوب ايجاد الثالث
المتناسب معهما أى ايجاد خط مستقيم مثل س يكون هو الطرف الثانى
من متناسبة هندسية حدها الاول مبين بالخط م ووسطاهما متساويان
وكلاهما مبين بالخط ك فلذلك طرق

• (الطريقة الاولى) •

أن يرسم مستقيم غير محدود مثل ا س ويؤخذ ا ب = م ويرسم
على هذا المستقيم نصف محيط دائرة ثم تؤخذ قحمة بالبيكار بقدر الخط ك
ويركز فى النقطة ا ويرسم قوس دائرة يقطع نصف المحيط فى نقطة مثل ح
يتم ينزل من النقطة ح العمود ح د على ا ب فيكون المستقيم

١ هو الثالث المناسب المطلوب

لانه قد تقر في نتيجة النظرية الثالثة والعشرين ان الوتر a وسط متناسب بين القطر a والقسم المجاور له وهو a أي ان

$$a : a :: a : a$$

وحيث كان $a = m$ و $a = n$ يكون

$$m : n :: n : a$$

والمطلوب أن يكون

$$m : n :: n : m$$

وهو المطلوب

• (الطريقة الثانية شكل ١٢٧ الثالث) •

أن يرسم مستقيم غير محدود مثل a ونعين عليه نقطة مثل a ويقام منها العمود a على a ويؤخذ $a = n$ ثم يؤخذ على يسار النقطة a بعد مثل $a = m$ ويوصل n ثم يقام من النقطة n العمود n على a فيكون a هو الخط المطلوب لانه قد تقر في النظرية الثالثة والعشرين ان العمود المتزل من رأس الزاوية القائمة على وترها وسط متناسب بين قسمي الوتر المذكور أي ان

$$a : a :: a : a$$

وحيث كان $a = m$ و $a = n$ يكون

$$m : n :: n : a$$

والمطلوب أن يكون

$$m : n :: n : m$$

• (الطريقة الثالثة) •

أن يكرر أحد الخطين المعطيين ثم يبحث عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة المعروفة بأحدى الطرق المشروحة في الدعوى الثانية العملية

• (مثالان) •

• (الاول) •

* (الاول) *

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على قاعدة معلومة يكافئ مربعا معلوما
فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م اضلاع المربع المعلوم وبالحرف ن لقاعدة
المستطيل المطلوب وبالحرف م لارتفاعه ثم يقال حيث ان كل مستطيل
مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه وكل مربع مساحته
تساوى تربيع أحد اضلاعه يكون

$$م^2 = ن \times م \text{ أو } م \times م = ن \times م$$

ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$ن : م :: م : م$$

ويعلم من هذه التناسبة ان الارتفاع المطلوب هو الثالث المتناسب مع الخطين

ن و م

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب تحويل مربع الى مثلث ارتفاعه معين فطريقة ذلك
أن يرمز بالحرف م اضلاع المربع المعلوم وبالحرف ع لارتفاع المثلث
المطلوب وبالحرف م لقاعدته المطلوبة ثم يقال حيث ان $\frac{1}{2}$ كل مثلث
مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في نصف ارتفاعه وكل مربع مساحته
تساوى حاصل ضرب ضلعه في نفسه يكون

$$م^2 = \frac{1}{2} ع \times م \text{ أو } م \times م = \frac{1}{2} ع \times م$$

ومن هذه المساوية ينتج أن

$$\frac{1}{2} ع : م :: م : م$$

فيعلم من هذه التناسبة ان قاعدة المثلث المطلوب هي الثالث المتناسب مع
نصف ارتفاعه وضلع المربع المعلوم

* (الدعوى الرابعة العملية) *

• (شكل ١٤٠ الاول والثاني والثالث و ١٣٢) •

اذا علم مستقيمان مثل $ا$ و $ب$ وكان المطلوب إيجاد مستقيم مثل $س$
يكون وسطا متناسبا بينهما فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

أن يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ عليه البعد $د ه = ا$ والبعد $ه و$
 $= ب$ ثم يرسم نصف محيط قطره $د و$ ويقام من النقطة $ه$ العمود
 $ه ر$ على القطر $د و$ فيكون العمود $ه ر$ هو الوسط المناسب
المطلوب لأنه قد تقر في النظرية الثالثة والعشرين أن

$$د ه : ه ر :: ه ر : ه و$$

وحيث كان $د ه = ا$ و $ه و = ب$ يكون

$$ا : ه ر :: ه ر : ب$$

والمطلوب أن يكون

$$ا : س :: س : ب$$

فاذن يكون $س = ه ر$ وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٤٠ الثاني)

ان يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه البعد $ا ب = ا$ كبر المستقيمين
المعلومين ثم يؤخذ $ا ح = المستقيم الآخر$ يرسم نصف محيط قطره
 $ا ب$ ثم يعمد من النقطة $ا$ مستقيما $ا ب$ فيكون البعد المحصور بين نقطة
القياس و النقطة $ا$ هو الوسط المناسب المطلوب لأنه قد تقر في النظرية
الثانية والثلاثين أن

$$ا ب : ا ح :: ا ح : ا ب$$

وحيث كان $ا ب = ا$ و $ا ح = ب$ يكون

$$ا : ا ح :: ا ح : ا$$

والمطلوب أن يكون

$$ا : س :: س : ا$$

فاذن يكون $س = ا ح$ وهو المطلوب

* (الطريقة الثالثة شكل ١٤٠ الثالث) *

أن يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه البعد $ا ب$ بقدر أكبر المستقيمين
المعلومين ويرسم نصف محيط دائرة قطرها $ا ب$ ثم يؤخذ بعد $ا ح$ بقدر
أصغر المستقيمين المعلومين ويقام من النقطة $ح$ عمود $ح د$ على $ا ب$
ثم يوصل $ا د$ فيكون الوتر $ا د$ هو الوسط المناسب المطلوب لأنه قد
تقرر في نتيجة النظرية الثالثة والعشرين أن

$$ا ب : ا د :: ا د : ا ح$$

وحيث كان $ا ب = ب$ و $ا ح = ا$ يكون

$$ب : ا د :: ا د : ا$$

والمطلوب أن يكون

$$ب : ب :: ب : ا$$

فاذن يكون $ب = ا د$ وهو المطلوب

* (الطريقة الرابعة شكل ١٣٢)

أن يرسل مستقيم مثل $ه د$ يساوي أكبر المستقيمين المعلومين ويؤخذ منه
بعد $ه د$ يساوي أصغر المستقيمين المذكورين ثم يرسم محيط دائرة
بالمقتضين $د و$ ويرسم من النقطة $ه$ مستقيم مماس $ه ا$
فيكون هو الوسط المناسب المطلوب

لأنه قد تقرر في النظرية الثانية والثلاثين أن

$$ه د : ه ا :: ه ا : ه د$$

وحيث كان $ه د = ب$ و $ه د = ا$ يكون

$$ب : ه ا :: ه ا : ا$$

$$ب : ب :: ب : ا$$

فاذن يكون $ب = ه ا$ وهو المطلوب

* (أمثلة) *

المثال الاول أن يكون المطلوب تحويل مستطيل الى مربع يكافئه فطريقة

ذلك أن يرمز بالحرف $ق$ لقاعدة المستطيل المعلوم وبالحرف $ع$ لارتفاعه وبالحرف $س$ لضلع المربع المطلوب
 ثم يقال حيث أن كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في
 ارتفاعه وكل مربع مساحته تساوى حاصل ضرب ضلعه في نفسه يكون

$$ق \times ع = س^2 \text{ أو } ق \times ع = س \times س$$

ومن هذه المساوية ينتج أن

$$ق : س :: س : ع$$

فيعلم من هذه التناسبة أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين قاعدة
 المستطيل المعلوم وارتفاعه

المثال الثاني أن يكون المطلوب تحويل مثلث معلوم الى مربع فطريقة ذلك
 أن يبحث عن الوسط المناسب الهندسى بين قاعدة المثلث ونصف ارتفاعه
 المثال الثالث أن يكون المطلوب تحويل متوازى الاضلاع الى مربع
 يكافئه فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المناسب الهندسى بين قاعدة
 المتوازى الاضلاع وارتفاعه

المثال الرابع أن يكون المطلوب تحويل شبه منحرف الى مربع يكافئه
 فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المناسب الهندسى بين نصف مجموع قاعدتي
 شبه المنحرف وارتفاعه

* (تنبيه عمومي يتعلق بالخطوط المتناسبة) *

قد تقرّر في الدعوى الثانية العملية أن

$$ا : ب :: ج : د$$

وفي الدعوى الثالثة العملية أن

$$م : ن :: د : هـ$$

وفي الدعوى الرابعة العملية أن

$$ا : ب :: د : هـ$$

فينتج من التناسبة الاولى أن

$$\text{سم} = \frac{2 \times \dots}{1} \quad (1)$$

ومن المناسبة الثانية أن

$$\text{سم} = \frac{2}{\dots} \quad (2)$$

ومن الثالثة أن

$$\text{سم} = 1 \times \dots \text{ أو } \text{سم} = \overline{1 \times \dots} \quad (3)$$

فالمساوية (١) تدل على الحد الرابع من متناسبة هندسية طرفها الأول α ووسطاها β و γ

والمساوية (٢) تدل على الحد الرابع من متناسبة هندسية طرفها الأول μ ووسطاها α متساويان وكلاهما يساوي δ أو على الثالث المناسب مع المقدارين μ و δ

والمساوية (٣) تدل على الوسط المناسب الهندسي بين المقدارين α

و μ وإذا رمز بالحرف μ لأحد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية وبالحرف δ لضلعها الآخر وبالحرف سم لوترها حدث

$$\text{سم} = \mu + \delta \text{ أو } \text{سم} = \overline{\mu + \delta}$$

فهذه المعادلة تدل على وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة مابين بالحرف μ وضلعه الآخر مابين بالحرف δ

ولورمز بالحرف μ لوتر القائمة وبالحرف δ لأحد الضلعين المحيطين بها وبالحرف سم لضلعها الآخر حدث

$$\mu = \delta + \text{سم} \text{ أو } \text{سم} = \mu - \delta$$

$$\text{أو } \text{سم} = \overline{\mu - \delta}$$

فهذه المساوية تدل على أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية وتره μ وضلعه الآخر δ

وقد تنظر في النتيجة الثانية من النظرية العاشرة أن نسبة قطر المربع لضلعه كنسبة جذر الاثنين للواحد فينبغي على هذا أن المربع الذي قطره يساوي

٤ يكون ضلعه مساويا $\sqrt{2}$ فحينئذ المعادلة التي بهذه الصورة

س = $\sqrt{2}$ تدل على ضلع المربع الذي قطره يساوي ٢ ولرسمه توضع

المعادلة المذكورة بهذه الصورة س = $\sqrt{2 \times 1}$ ثم يبحث عن

الوسط المناسب الهندسي بين ٢ و ١ فيكون هو ضلع المربع المطلوب

وإذا فرض معادلة بهذه الصورة

س = $\sqrt{0}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فليكتب

هكذا

$$س = \sqrt{0} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

فيكون س هو وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة يساوي

١ وضلعه الآخر يساوي ٢

ولو فرض معادلة بهذه الصورة

س = $\sqrt{6}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فلتوضع

هكذا

$$س = \sqrt{6} = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4}$$

فيكون س هو وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة يساوي

٢ وضلعه الآخر يساوي ٢

أو بوضع هكذا

$$س = \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3}$$

فيكون س هو الوسط المناسب الهندسي بين مستقيمين أحدهما يساوي

٢ والاخر يساوي ٣

وإذا فرض معادلة بهذه الصورة

س = $\sqrt{3}$ وكان المطلوب بيان ما تدل عليه هذه المعادلة فليكتب هكذا

$$\overline{١ \times ٣} \gamma = \overline{٣} \gamma = \text{سه}$$

فيكون سه هو الوسط المناسب الهندسي بين مستقيمين أحدهما يساوي ٣ والاخر يساوي ١

وبالجملة اذا رمز بالحرف م لعدد صحيح مركب من مضروبين أحدهما ه والاخر صه كان γ م أو γ ه \times صه هو الوسط المناسب الهندسي بين ه و صه

و γ م أو γ م \times ١ يدل في جميع الحالات على الوسط المناسب الهندسي بين م والواحد

وقد ذكرنا طرق الرسم كل من الرابع المناسب والثالث المناسب والوسط المناسب وذكرنا أيضا طريقة لرسم المثلث القائم الزاوية الذي علم منه ما يكفي لرسمه

واعلم ان المعادلات التي ذكرناها في هذا التنبيه مفيدة جدًا اذ هي الارتباطات الاصلية المستعملة في الهندسة وفي تطبيق الجبر على الهندسة
* (الدعوى الخامسة العملية) *

* (شكل ١٤٢ الثاني) *

اذا علمت نقطة مثل ح بين ضاهي زاوية مثل ع ا صه وكان المطلوب أن يمتد من هذه النقطة مستقيم مثل د ح ه نسبة جزئه د ح لجزئه الاخر ح ه كنسبة م : ه

فطريقة ذلك أن يمتد من النقطة المعلومة ح مستقيم مثل ع س يوازي ا ع الذي هو أحد ضاهي الزاوية ثم يبحث عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة وهي م و ه و ا ثم يؤخذ س ه بقدر الرابع المناسب المذكور ويوصل المستقيم ه د فيكون ه د هو المستقيم المطلوب لانه يلزم من كون الخط ح س موازيا للخط ا د أن يكون

$$ح : د : ح ه :: ا : س : س ه$$

وبحيث ان ا س : س ه :: م : ه : د يكون

ح د : ع ه :: م : ن

وهو المطلوب

* (تنبيه) *

حين تكون النقطة المعلومة ع على الخط المنصف للزاوية المعلومة
 ع ا ص يكون للمسئلة حلان وحين تكون الكمية م مساوية للكمية
 ن تختصر العملية بأن يؤخذ ه بقدر ا - ثم يوصل ه ع د
 فيكون ع د = ع ه وبهذه الكيفية تحل مسئلة هي
 أن يكون المعلوم نقطة مثل ا بين ضلعي زاوية مثل د ح - كما في الشكل
 ١٤٢ من اللوحة ه ويكون المطلوب أن يثبت من هذه النقطة مستقيم
 جزاء ا د و ا - الكائنان بين النقطة المعلومة ا وضلعي الزاوية
 متساويان

* (الدعوى السادسة العمالية) *

* (شكل ٢٨٨) *

اذا علم مستقيمان مثل ا - و ح د ممكنا التقاطع لكن نقطة تقاطعهما
 خارجة عن لوحة الرسم وكان المطلوب أن يثبت مستقيم ثالث مثل ع ل
 أو ح ل يمر بنقطة تقاطع الخطين المعلومين ا - و ح د وبهذه النقطة مثل
 ح أو ع معينة الوضع بين ضلعي زاوية الخطين ا - و ح د أو خارجها
 فطريقة عمل ذلك حالتان

* (الحالة الاولى) *

أن يثبت من النقطة المعلومة ع مستقيم كيف اتفق مثل ه ح ف ثم تؤخذ
 نقطة مثل ر على المستقيم ا - ويمتد منها مستقيم مثل ر ك يوازي
 ه ف ويقسم ر ك الى جزئين أحدهما ر ل والاخر ل ك بحيث
 يكون

ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف

فتتبعين

فتتبعين النقطة ل ويككون المستقيم ل ح هو المستقيم المطلوب
لانه يلزم من كون

ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف

أن تتقاطع الخطوط الثلاثة ر ه و ل ح و ك ف في نقطة واحدة
كما هو واضح مما تقر في النظرية الثانية والعشرين
(الحالة الثانية)

أن يمد من النقطة المعلومة ح مستقيم كيف اتفق مثل ه ح ف ثم تؤخذ
نقطة مثل ر على المستقيم ا ب ويمد منها مستقيم مثل ر ك و يوازي
ه ح ف ثم يقسم ر ك الى جزئين أحدهما ر ل والاخر ل ك بحيث
يكون

ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف

ثم يبحث عن النقطة ل التي هي النقطة الاقترانية للنقطة ل أي
المقارنة لها في الخط ر ك فيكون المستقيم ل ح هو المستقيم المطلوب
لانه يلزم من كون النقطتين ح و ح متوافقتي الاقتران أن يكون

ه ح : ح ف :: ه ح : ح ف

وكذا يلزم من كون النقطتين ل و ل متوافقتي الاقتران أن يكون

ر ل : ل ك :: ر ل : ل ك

فقد سبق بالعمل أن ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف

فاذن يكون ر ل : ل ك :: ه ح : ح ف او

ر ل - ل ك : ل ك :: ه ح - ح ف : ح ف أي

ر ك : ل ك :: ه ف : ح ف

ويلزم من هذا ان تتقاطع الخطوط الثلاثة ر ه و ك ف و ل ح
في نقطة واحدة

(تنبيه)

اعلم انه يمكن تعيين النقطة ل مباشرة بدون احتياج للنقطة ل المتوافقة
الاقتران مع النقطة ل

وذلك بأن يمد من النقطة المعلومة ح مستقيم مثل ح ف ه ثم تؤخذ
نقطة مثل ر على المستقيم ا ب ويمد منها مستقيم مثل ر ك يوازي
ه ح ثم يبحث عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة ه ف و ر ك
و ف ح ويؤخذ ك ل بقدر الرابع المناسب المذكور فتعين النقطة
ل والمستقيم الذي يمر بها وبالنقطة المعلومة ح يمر بتقاطع الخطبين
المعلومين ا ب و ح د
لانه يلزم من كون

ه ف : ر ك :: ف ح : ك ل

أن تتقاطع الخطوط الثلاثة ر ه و ك ف و ل ح في نقطة واحدة

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ١٤٣ و ١٤٤ من اللوحة ٦)

إذا كان المطلوب انشاء مربع يكافئ شكلا متوازي الاضلاع معلوما أو مثلثا
مفروضا فطريقة ذلك أن يقال

أولا يمكن ا ب ح د شكلا متوازي الاضلاع و ا ب قاعدته و د ه
ارتفاعه فيبحث عن الوسط المناسب بين القاعدة ا ب والارتفاع د ه
يا ح دى الطريق المقررة في الدعوى الرابعة العملية وليكن ط ع هو الوسط

المناسب

المتناسب المذکور ثم ينشأ على ط ع مربع يكون هو المربع المطلوب
 أى المكافئ للشكل المتوازي الاضلاع ا ب د د لانه يلزم من كون ط ع
 ومطامتناسبا بين القاعدة ا ب والارتفاع د ه أن يكون
 ا ب : ط ع :: ط ع : د ه
 فاذن يكون

$$\overline{\text{ط ع}} = \text{ا ب} \times \text{د ه}$$

وحيث ان ا ب د ه يساوى مساحة متوازي الاضلاع ا ب د ه
 يكون المربع المنشأ على ط ع مكافئاً لتوازي الاضلاع المعلوم وهو
 المطلوب

وثانياً ليكن ا ب د هو المثلث المقروض و د ه قاعدته و ا د ارتفاعه
 فيبحث عن الوسط المناسب بين القاعدة د ه ونصف الارتفاع ا د
 وليكن ط ع هو الوسط المذکور ثم ينشأ على ط ع مربع يكون هو
 المربع المطلوب أى المكافئ للمثلث ا ب د
 لانه يلزم من كون ط ع ومطامتناسبا بين القاعدة د ه ونصف
 الارتفاع ا د أن يكون

$$\text{د ه} : \text{ط ع} :: \text{ط ع} : \frac{1}{2} \text{ا د}$$

فاذن يكون

$$\overline{\text{ط ع}} = \text{د ه} \times \frac{1}{2} \text{ا د}$$

وحيث ان د ه $\times \frac{1}{2}$ ا د يساوى مساحة المثلث ا ب د يكون
 المربع المنشأ على ط ع مكافئاً للمثلث ا ب د وهو المطلوب

• (تنبيه) •

اعلم انه قد سبق حل هاتين المسئلتين بطريقة حسابية في الامثلة المشروحة
 في الدعوى الرابعة العملية

• (الدعوى الثامنة العملية) •

• (شكل ١٤٥ من اللوحة ٦) •

إذا كان المطلوب إنشاء مستطيل مثل $ا د ه ط$ على مستقيم معلوم مثل $ا د$ يكافئ مستطيلاً مفروضاً مثل $ا ب و د$ فطريقة ذلك أن يبحث عن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة المعروفة وهي $ا د و ا ب و ا د$ وليكن $ا ط$ هو الرابع المناسب المذكور ثم ينشأ مستطيل أحده ضاعبه المتجاورين $ا د$ والآخر $ا ط$ فيكون هو المستطيل المطلوب أي المكافئ للمستطيل المفروض $ا ب و د$

لأنه يلزم من كون $ا ط$ رابعاً متناسباً مع الخطوط الثلاثة $ا د و ا ب و ا د$ أن يكون

$$ا د : ا ب :: ا ب : ا ط$$

فأذن يكون

$$ا د \times ا ط = ا ب \times ا د$$

أي أن المستطيل $ا د ه ط$ مكافئ للمستطيل $ا ب و د$ وهو المطلوب
• (تنبيه) •

اعلم أنه قد سبق حل هذه المسئلة بطريقة حسابية في الامثلة المقررة في الدعوى الثانية انعمانية

• (امثلة) •

• (المثال الاول) •

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المكافئ لشكل متوازي الاضلاع فاعلم أنه تسعة أذرع وارتفاعه أربعة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار القاعدة في مقدار الارتفاع فحذر حاصل الضرب هو مقدار ضلع المربع المطلوب

ففي هذا المثال بضرب تسعة أذرع في أربعة أذرع فيكون الحاصل من الضرب ستة وثلاثين ذراعاً مربعاً وهو مقدار مساحة كل من المستطيل المعلوم والمربع المطلوب فإذا أخذ جذر الستة والثلاثين كان ناتج الجذر

سنة أذرع وهو مقدار ضلع المربع المطلوب

• (المثال الثاني) •

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المكافئ لثلاث قاعدته اثنا عشر ذراعا وارتفاعه ستة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار القاعدة في نصف مقدار الارتفاع ثم يؤخذ جذر حاصل الضرب فيكون الناتج من الجذر هو مقدار ضلع المربع المطلوب

ففي هذا المثال يضرب اثنا عشر ذراعا في ثلاثة أذرع فيكون حاصل الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعاً وهو مقدار مساحة كل من المثلث المعلوم والمربع المطلوب فإذا أخذ جذر الستة والثلاثين كان ناتج الجذر ستة أذرع وهو مقدار ضلع المربع المطلوب

• (المثال الثالث) •

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ارتفاع المستطيل الذي مقدار قاعدته اثنا عشر ذراعا ليكون مكافئاً للمستطيل المعلوم مقدار قاعدته تسعة أذرع ومقدار ارتفاعه أربعة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار قاعدة المستطيل المعلوم في مقدار ارتفاعه ثم يقسم حاصل الضرب على مقدار القاعدة الأخرى التي يراد إنشاء المستطيل عليها فيكون خارج القسمة هو مقدار الارتفاع المطلوب

ففي هذا المثال يضرب تسعة أذرع في أربعة أذرع فيكون حاصل الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعاً فإذا قسم هذا الحاصل على اثني عشر ذراعا كان خارج القسمة ثلاثة أذرع وهو مقدار ارتفاع المستطيل المطلوب

• (الدعوى التاسعة العملية) •

• (شكل ١٥٢ من اللوحة ٦) •

إذا علم مربع مثل h وكان المطلوب إنشاء مستطيل يكافئه ويكون مجموع ضلعيه المتجاورين مساوياً لخط معلوم مثل a فطريقة ذلك أن يرسم نصف محيط قطر a ثم يرسم مستقيم مثل h يوازي القطر a

بشرط أن يكون البعد بينهما مساويا للخط $ا د$ المساوي اضلع المربع المعلوم
 $هـ$ ثم ينزل على القطر $ا ب$ عمود مثل $هـ و$ من النقطة $هـ$ التي
تقاطع الخط $د هـ$ بالمحيط فهذا العمود يقسم القطر $ا ب$ الى قسمين هما
 $ا و$ و $و ب$ والمستطيل المكون منهما هو المستطيل المطلوب لان مجموعهما
يساوي $ا ب$ ومستطيلهما $ا و \times و ب$ يساوي مربع العمود $هـ و$
كما نقرر ذلك في نتيجة النظرية الثالثة والعشرين وحيث ان العمود $هـ و$
يساوي العمود $ا د$ و $ا د$ يساوي ضلع المربع المعلوم $هـ$ يكون هذا
المستطيل مكافئا للمربع المعلوم $هـ$ وهو المطلوب

• (تنبيه) •

يلزم لا يمكن حل هذه المسئلة ان لا يزيد البعد $ا د$ عن نصف القطر أعني أن
لا يزيد ضلع المربع المعلوم $هـ$ عن نصف الخط المعلوم $ا ب$

• (امثلة) •

• (المثال الاول) •

اذا علم مربع مساحته ستة وثلاثون ذراعا مربعاً وكان المطلوب انشاء
مستطيل يكافئه ويكون محيطه ستة وعشرين ذراعا فطريقة ذلك أن ينصف
المحيط فيكون الناتج ثلاثة عشر ذراعا وهو مقدار مجموع الضلعين المتجاورين
من المستطيل المطلوب

وحيث ان ضلع المربع المعلوم أقل من نصف هذا المجموع يعلم من ذلك أن حل
هذه المسئلة ممكن وحيث ان معرفة كل من الضلعين المتجاورين من المستطيل
المطلوب يرزى بالحرف $س$ لاحدهما فيكون الآخر مساويا للكمية
 $١٢ - س$ فاذن يكون

$$س (١٢ - س) = ٣٦ \text{ أو}$$

$$١٢ س - س^2 = ٣٦ \text{ أو}$$

$$س^2 - ١٢ س + ٣٦ = ٠$$

وبعضى

وبمقتضى القواعد المقررة في الدرجة الثانية من علم الجبر يكون

$$\text{أو } \sqrt{36 - \frac{13}{2}} \pm \frac{13}{2} = \text{م}$$

$$\text{أو } \sqrt{\frac{4 \times 36}{2} - \frac{13}{2}} \pm \frac{13}{2} = \text{م}$$

$$\text{أو } \sqrt{\frac{144 - 169}{2}} \pm \frac{13}{2} = \text{م}$$

$$\text{أو } \sqrt{\frac{5}{2} \pm \frac{13}{2}} \pm \frac{13}{2} = \text{م}$$

فإذا أضيف الكسر الثاني الذي هو $\frac{5}{2}$ الى الكسر الاول الذي هو $\frac{13}{2}$ كان الناتج مساويا لاحد بعدى المستطيل المطلوب انشاؤه وإذا طرح الكسر الثاني من الكسر الاول كان الباقي مساويا لبعده الآخر فاذن يكون أحد بعدى المستطيل $\frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9$ والبعده الآخر $\frac{5-13}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ وذلك لان $4 \times 9 = 36$ و $9 + 4 = 13$ و $13 = 2 \times 4$ و $26 = 2 \times 13$.

وحيث ان هذا المستطيل مشتمل على شروط المسئلة فهو المطلوب

(المثال الثاني)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربعا مساحته تسعة وأربعون ذراعا مربعا بحيث يكون مجموع الضلعين المتجاورين من ذلك المستطيل مساويا لاربعة عشر ذراعا فطريقة ذلك أن يقال حيث ان ضلع المربع المعلوم سبعة أذرع ونصف مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل سبعة أذرع كذلك يعلم من ذلك ان حل هذه المسئلة ممكن وحينئذ اعرفه كل من الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب يجري العمل كما في المثال الاول

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربعا مساحته أربع وستون ذراعا مربعا ويكون مجموع الضلعين المتجاورين من ذلك المستطيل أربعة عشر ذراعا فطريقة ذلك أن يقال حيث ان ضلع المربع المعلوم ثمانية أذرع ونصف مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل سبعة أذرع يعلم من ذلك ان حل هذه

المسئلة غير ممكن

- (الدعوى العاشرة العملية) •
 • (شكل ١٥٣ من اللوحة ٦) •

اذا علم مربع مثل γ وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون فاضل ضلعيه المتجاورين مساويا لخط معلوم مثل α فطريقة ذلك أن يرسم محيط قطره الخط المعلوم α ثم يقام على طرف هذا القطر عمود مثل α ويؤخذ α بقدر ضلع المربع المعلوم γ ثم يوصل مستقيم بين النقطة δ والمركز ϵ فالمستقيمان $\delta \epsilon$ و $\delta \alpha$ يكونان الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب لان فاضلهما يساوى القطر هو α والقطر α وحاصل ضربهما وهو $\delta \alpha \times \delta \epsilon$ يساوى مربع α كما نقرر ذلك في نتيجة النظرية الثانية والثلاثين وحيث كان مربع α يساوى المربع المعلوم γ يلزم أن يكون هذا المستطيل مكافئاً للمربع المعلوم γ وهو المطلوب

• (مثال) •

اذا علم مربع مساحته ستة وثلاثون ذراعاً مربعاً مثلاً وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون فاضل ضلعيه المتجاورين تسعة أذرع فطريقة ذلك أن يرمن بالحرف α لاصغر الضلعين المتجاورين فيكون الضلع الآخر $\beta + 9$ وتكون مساحة المستطيل $(\alpha + 9) \times \alpha$ وحيث كان المطلوب أن يكون المستطيل مكافئاً للمربع المعلوم وكانت مساحة المربع المعلوم ستة وثلاثين ذراعاً مربعاً يلزم أن يكون

$$(\alpha + 9) \times \alpha = 36 \quad \text{أو}$$

$$\alpha^2 + 9\alpha = 36 \quad \text{أو}$$

$$\alpha^2 + 9\alpha - 36 = 0 \quad \text{ومن هذه المعادلة ينتج أن}$$

$$\alpha = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 144}}{2} \quad \text{أو}$$

$$\begin{aligned} \text{سـ} &= \pm \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{4 \times 36}{4} + \frac{9}{4}} \pm \frac{9}{2} = \pm \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{225}{4}} \text{ أو} \\ \text{سـ} &= \pm \frac{9}{2} - \frac{15}{2} = 3 \text{ أو سـ} = 12 \end{aligned}$$

وحيث ان المقدار الثاني سالب لا يؤخذ الا الاول وحيث ان يكون أصغر الضلعين ثلاثة أذرع وأكبرهما $9 + 3 = 12$ ذراعا وحيث أن $3 \times 12 = 36$ و $12 - 3 = 9$ يكون هذا المستطيل هو المستطيل المطلوب لانه قد اشتمل على شروط المسئلة بتمامها
* (تنبيهان) *

الاول اعلم ان حل هذه الدعوى ممكن دائما
الثاني اذا كان المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربع معلوما كان للمسئلة حلول لاحصر اعدادها بمعنى ان المسئلة التي بهذا المنطوق سبالة لا ينحصر حلها في مستطيل واحد

وذلك ان مربع الخط المماس الى مكافئ المستطيل الحادث من ضرب أى خط قاطع مدم من النقطة د مثل دو في جزئه الخارج ده أى ان

$$\overline{دو} = دو \times ده = دَو \times ده = دُو \times ده \text{ الخ}$$

و $دَو$ و $دُو$ و $ده$ رموز لنقط التقاطع بفرض ان الخطوط $دَو$ و $دُو$ الخ مرسومة

* (الدعوى الحادية عشر العمالية) *

* (شكل ١٤١ من اللوحة ٥) *

اذا كان المطلوب تقسيم مستقيم محدود مثل اب الى قسمين أكبرهما وسط متناسب بين الخط الكلى والجزء الآخر فلذلك جملة حلول

* (الحل الاول) *

لتكن النقطة و هى نقطة التقسيم و ار هو القسم الاكبر المطلوب فعلى منطوق المسئلة يلزم أن يكون

ا- : او :: او : و-

وقد ترفي علم الحساب ان نسبة مجموع الحدين الاولين الى الحد الاول كنسبة مجموع الحدين الاخيرين الى الحد الثالث فاذن يكون

$$- + : - :: + + : -$$

وحيث ان $او + و = ا$ يكون

$$- + \text{ او} : - :: - : - \text{ او}$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$\frac{1}{-1} = 1 \times (1 + -1)$$

فالجهد في هذه المعادلة هو $a + a$

ويعلم من هذه المعادلة ان الخطيئ المجهورين هم ما ضلعا مستطيل قاضل ضلعيه

يساوى الخط المعلوم a ومساحته تساوى a^2 فاذن يمكن إيجاد

ذلك المستطيل بما ذكر في العملية السابقة من ذلك تنتج طريقة رسمية

هي أن يقام العزمود - ج على أ - من النهاية - ويؤخذ -

مساويا النصف الخط ا - ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر ٢٠ ويرسم محيط

دائرة مركزه النقطة γ ثم يوصل المستقيم $\alpha\gamma$ فيكون أحد الخطين

المطلوبين = اه والآخر = اء لان فاضاهما ده = ٢٠٠

⇒ a - مستطيلهما وهو $a \times a = a^2$

فازن یکون $- +$ او $=$ اه ویکون او $=$ اء فاذا جعلت

النقطة ۱ مرکز اور رسم قوس دائرة نصف قطره يساوى ۱۰ كانت نقطة

تقاطع هذا القوس بالخط المعلوم - أ - هي نقطة التقسيم المطلوبة فاذن

يكون أو هو القسم الأكبر المطلوب

* (4.1.1) *

قد تبين أن

$a = a - a = a - a = a$

$$\overline{\overline{a} + \overline{b}} = \overline{a + b}$$

فاذا رمز بالحرف a للخط a يكون

$$\overline{\overline{a} + \overline{b}} = \overline{\overline{a} + \overline{b}} = \overline{a + b}$$

و $\overline{a} = a$ فاذا كان يكون

$$\overline{a} = a \quad \overline{a} = \overline{a} \quad \overline{a} = \overline{a} \quad \overline{a} = \overline{a}$$

• (الحل الثاني) •

ليكن a هو القسم الاكبر المطلوب فعلى منطوق المسئلة يلزم أن يكون

$$a : b :: c : d$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$a = b \times c = (d - a) \times c = \overline{a} \times c$$

$$\overline{a} = a \times c + \overline{a}$$

وبمقتضى القواعد المقررة في الدرجة الثانية من علم الجبر يكون

$$a = \overline{a} \pm \overline{a} \quad \text{أي}$$

$$a = \overline{a} \pm \overline{a}$$

$$\text{أو } a = \overline{a} + \overline{a} \quad (1)$$

$$\text{و } a = \overline{a} - \overline{a} \quad (2)$$

وحيث أن مقدار a سالب ومقداره المطلق أكبر من الخط a بعلم

ن ذلك أن المقدار الأول الذي هو $s = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$ هو الذي يوافق حل المسئلة وبالتأمل في هذه المعادلة وملاحظة
 اتقزر في التنبيه العمومي المتعلق بالخطوط المناسبة يعلم أن القسم الأكبر
 المطلوب يتحصل بطرح نصف الخط المعلوم a من وتر مثلث قائم الزاوية
 حذض على زاوية القائمة يساوي الخط المعلوم a وضلعها الآخر
 يساوي نفسه ومن هنا تنج طريقة رسمية

هي أن يقام العمود c على a من نهايته b ويؤخذ $c =$
 $\frac{1}{2}a$ ويوصل ad ثم يطرح c من d أي يؤخذ $d =$
 $= c$ فيكون ad مساويا للقسم الأكبر المطلوب فإذا أخذ $ad =$
 $=$ أي ينقسم الخط المعلوم a كما هو المطلوب ويكون

$$a : ad :: ad : b$$

(الحل الثالث)

أن يقام العمود c على a من نهايته b ويؤخذ c مساويا
 لنصف الخط a ثم تؤخذ قمتة بالبيكار بقدر c ويرسم محيط دائرة
 مركزه النقطة c ثم يوصل المستقيم ad فيقطع محيط الدائرة في النقطة
 d ثم يؤخذ ad مساويا للبعد ad فينقسم الخط a في النقطة d
 إلى القسمين المطلوبين ويكون

$$a : ad :: ad : b$$

لأنه يلزم من كون الخط a عمودا ممتدا من نهاية نصف القطر c أن
 يكون مماسا للمحيط ولومد الخط ad على استقامته جهة d حتى قطع
 المحيط في النقطة d لحدث

$$ad : a :: a : b$$

كما نقرر ذلك في النظرية الثمانية والثلاثين وقد تقرر في علم الحساب أن نسبة
 المقدم ناقصا تاليه إلى تاليه كنسبة المقدم الثاني ناقصا تاليه إلى تاليه فاذن

يكون

يكون

اه — اب : اب :: اب — اد : اد
 ويلزم من كون نصف القطر ح مساوياً لنصف الخط اب أن يكون
 ده مساوياً للخط اب ويلزم من هذا أن يكون
 اه — اب = اد = اد = اد ، و
 اب — اد = اب = اد = اد = رو

فاذن يكون

ار : اب :: رو : او
 وبتغيير موضع الوسطين يكون
 اب : او :: او : رو
 وهو المطلوب

* (تنبيه) *

اعلم أن الخط اه ينقسم في النقطة د كما ينقسم الخط اب في النقطة
 و أعني أن

اه : ده :: ده : اد

لانه قد تقرر أن

اه : اب :: اب : اد وأن اب = ده

فاذن يكون

اه : ده :: ده : اد

ثم ان هذا التقسيم يسمى بنسبة الوسط والطرفين بمعنى أن الخط المقسوم بطريق
 نسبة الوسط والطرفين هو ما كانت نسبته لجزئه الاكبر كنسبة جزئه الاكبر
 لجزئه الاصغر وبعبارة أخرى هو ما كان مربع جزئه الاكبر مكافئاً للمستطيل
 المكوّن من ذلك الخط وجزئه الاصغر وسيأتى استعمال هذا التقسيم

* (الدعوى الثانية عشر العملية) *

* (شكل ٢٨٩) *

إذا كان المطلوب رسم مستقيم يمر دائرتين فطريقة ذلك أن يقال ليكن $م$ مستقيماً مماساً للدائرتين من الخارج و $م$ مماساً لهما من الداخل ولتكن $ح$ نقطة تقاطع $م$ بخط المراكزين $ح$ و $ح$ نقطة تقاطع $م$ بالخط $ح$ فيعلم من ذلك أنه إذا علم موضع النقطتين $ح$ و $ح$ يكفي أن يمتد من كل منهما مستقيم مماس لأحدى الدائرتين فيمس الأخرى وحينئذ تحل المسئلة فإذا وصل نصف القطرين $ح$ و $ح$ يكون المثلث $ح$ $ح$ $ح$ مشابهاً للمثلث $ح$ $ح$ $ح$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$ح : ح :: ح : ح \quad (١)$$

ولو وصل نصف القطرين $ح$ و $ح$ لكان المثلث $ح$ $ح$ $ح$ مشابهاً للمثلث $ح$ $ح$ $ح$ ويلزم من تشابههما أن يكون

$$ح : ح :: ح : ح$$

وحيث أن $ح = ح$ و $ح = ح$ يكون

$$ح : ح :: ح : ح \quad (٢)$$

وحيث أن كلامنا من نصف القطرين $ح$ و $ح$ معلوم يعلم من ذلك أن النقطتين $ح$ و $ح$ نقطتان مقترتان قائمتان للبعد $ح$ إلى قسمين النسبة بينهما ثابتة ومساوية للنسبة المعلومة $ح : ح$ ومن هنا تنتج طريقة رسمية هي أن يرسم في الدائرة $ح$ قطر $ح$ كيف اتفق مثل القطر $ح$ ثم يمتد من النقطة $ح$ نصف قطر مثل $ح$ يوازي $ح$ ثم يوصل كل $ح$ فتكون النقطتان $ح$ و $ح$ الحادّتان من

تقاطع خط المركزين بالمستقيمين $ك ل$ و $ك ج$ النقطتين المطلوبتين

لأنه يلزم من كون $ح ك$ موازاً بالخط $ح ل$ أن يكون

$$ح ك : ح ل :: ح ك : ح ل$$

وحيث أن $ح ك = ح م$ و $ح ل = ح د$ يكون

$$ح ك : ح م :: ح ك : ح د$$

وكذا يلزم من تساوى الزوايا المتناظرة من المثلثين $ح ك د$ و $ح م د$ أن يكون

$$ح ك : ح م :: ح د : ح د$$

فيثبت إذاً ما دعى كلتا النقطتين $ك$ و $د$ مماساً لدائرة $ح$ أولاً دائرة $ح$ كان مماساً للآخرى

• (مناقشات) •

الأولى إذا كان البعد بين المركزين $ح ح$ أكبر من مجموع نصفي قطري الدائرتين أمكن أن يمتد أربعة خطوط مستقيمة كل منها يمس الدائرتين لكن اثنين منها يمسانها من الخارج بأن تكون نقطة تلاقحهما بخط المركزين غير محصورة بين المركزين المذكورين والاثنان الآخران يمسانها من الداخل بأن تكون نقطة تلاقحهما بخط المركزين محصورة بين هذين المركزين

والثانية إذا كان البعد بين المركزين $ح ح$ مساوياً لمجموع نصفي قطري الدائرتين أمكن أن يمتد ثلاثة خطوط مستقيمة كل منها يمس الدائرتين لكن اثنين منها يمسانها من الخارج والثالث يمسهما من الداخل

والثالثة إذا كان البعد بين المركزين $ح ح$ أصغر من مجموع نصفي قطري الدائرتين وأكبر من فاصلهما أمكن أن يمتد خطان مستقيمان كلاهما يمس

الدائرتين من الخارج فقط

والرابعة اذا كان البعدين المركزين $ح ح$ مساويا للفاصل نصفي قطري
الدائرتين امكن أن يندمستقيم $ح ح$ من الخارج فقط
والخامسة اذا كانت احدي الدائرتين داخل الاخرى لا يمكن أن يند
مستقيم $ح ح$ الا من الخارج ولا من الداخل لان المستقيم الذي يمس محيط
الدائرة الصغرى يتقاطع محيط الكبرى كما هو واضح
* (تنبيه) *

اعلم أن حل هذه المسئلة بهذه الطريقة سهل من حلها بالطريقة المعتادة
المشروحة في ملحقات المقالة الثانية

* (الدعوى الثالثة عشر العملية) *

* (شكل ٢٩٠) *

اذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين معلومتين مثل $ا$ و $ب$
ويعمس مستقيما وضعه معين مثل $ل م$
فطريقة ذلك أن يقال لتكن $ح$ هي نقطة تماس المحيط المطلوب بالمستقيم
المعلوم فلو وصل المستقيم $ح ا$ ومد على استقامته جهة $ا$ حتى قطع
المستقيم المعلوم في نقطة مثل $هـ$ لازم أن يكون

$هـ ب : هـ ح :: ح د : د ا$

فيعلم من هذه المناسبة أن البعد بين نقطة التماس $ح$ ونقطة تقاطع المستقيم
المعلوم بالمستقيم المار بالنقطتين المعلومتين وسط مناسب بين المستقيمين
 $هـ ب$ و $ا هـ$ ومن هنا تنتج طريقة رسمية

هي أن يوصل مستقيم بين النقطتين المعلومتين ويمد حتى يقطع المستقيم المعلوم
في نقطة مثل $هـ$ ثم يبحث عن الوسط المناسب بين المستقيمين $هـ ب$ و $ا هـ$

ثم يؤخذ من المستقيم المعلوم $ل م$ البعد $هـ ح$ أو $هـ د$ بقدر الوسط
المناسب المذكور فتكون النقطة $ح$ أو $د$ نقطة تماس المحيط المطلوب

بالمستقيم

بالمستقيم المعلوم ل م
 ورسم هذا المحيط يمتد من النقطة ه و عمود مثل و ر على ل م ثم يقيم
 عمود مثل س ك على وسط المستقيم ا ب فالنقطة ح التي هي تقاطع
 العمودين تكون مركز المحيط المطلوب ويكون ح و نصف قطره وبهذا تحل
 المسئلة

• (تنبيه) •

الوسط المناسب الذي يحدث من هذه المناسبة

هـ : س : س : م : هـ

يمكن رسمه في الشكل بعينه بسهولة وذلك أن يرسم على هـ نصف محيط
 دائرة ويقام من النقطة ا العمود ا د فالوتر هـ د يكون هو الوسط
 المناسب المطلوب ويكون بعد ذلك أن يؤخذ هـ ح بقدر هـ د

• (مناقشات) •

حل هذه المسئلة يمكن دائماً مادامت النقطتان ا و ب موضوعتين
 في جهة واحدة بالنسبة للخط ل م وفي هذه الحالة يمكن رسم دائرتين
 كتاهما توافق حل المسئلة لكن احدهما تماس المستقيم المعلوم ل م
 في النقطة و والاخرى تمسه في النقطة ح التي بعدها عن النقطة هـ
 بقدر الوسط المناسب هـ د

ولا يمكن حلها اذا كان المستقيم المعلوم واقعا بين النقطتين ا و ب
 وحين يكون المستقيم ا ب الماراً بالنقطتين المعلومتين ا و ب موازياً
 للمستقيم المعلوم ل م فلا يكون هناك وسط متناسب يمكن رسمه ففي هذه
 الحالة نقطة تماس المستقيم المعلوم ل م بالمحيط المطلوب توجد لاشكال
 في تقاطع المستقيم المعلوم ل م بالعمود المقام على وسط المستقيم ا ب
 ولا يوجد في هذه الحالة الا محيط واحد يوافق حل المسئلة

• (الدعوى الرابعة عشر العملية) •

• (شكل ٢٩١) •

إذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يس ضلعي زاوية ويمر بنقطة معينة
فيهما

فطريقة ذلك أن تتصف الزاوية المعلومة بالمستقيم لـ ع ثم ينزل من
النقطة ا عمود مثل ا هـ آ على لـ ع ويؤخذ آ ع بقدر ا هـ
فالحيط الذي يكون مركزه على لـ ع ويمر بالنقطة ا يمر أيضاً بالنقطة

أ وحينئذ نزل هذه المسئلة الى السابقة

واعلم أنه يمكن رسم دائرتين كلتا هما توافق حل المسئلة

• (الدعوى الخامسة عشر العملية) •

• (شكل ٢٩٢) •

إذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين مثل ا و ب ويس محيط
دائرة أخرى معلومة مثل ع

فطريقة ذلك أن يقال ليقرض أن المسئلة محلولة وأن ا م ب هو المحيط
المطلوب فلو تم المماس المشترك م د حتى قابل القاطع ا ب ومد من
النقطة د مستقيم مثل د هـ ب قاطع المحيط الدائرة المعلومة ع للزم
أن يكون

$$\overline{د م} = د ب \times د ا \text{ أو}$$

$$\overline{د م} = د ب \times د هـ$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$د ب \times د هـ = د ب \times د ا$$

وبعلم من هذه المساوية أن المحيط الذي يمر بالنقطتين ا و ب يمر
بالنقطة د وحيث أن القاطع د هـ محدود بالاختيار من النقطة د
تكون النقطة هـ من جملة نقط المحيط ومن هنا تنج طريقة رسمه .

هي أن يمرر بالنقطتين المعلومتين ا و ب محيط دائرة يقطع محيط الدائرة

المعلومة ح في نقطتين مثل هـ و و ثم يوصل المستقيمان ا ب و هـ و ويمتدان حتى يلتقيان في نقطة مثل د ثم يمتد من النقطة د مستقيماً مثل د م يمس محيط الدائرة المعلومة ح فالنقطة م تكون نقطة تماس المحيطين وحينئذ يسهل رسم المحيط المطلوب

وحيث انه يمكن أن يمتد من النقطة د مستقيماً آخر مثل د م يمس محيط الدائرة ح يعلم من ذلك أن لهذه المسئلة حلين

*** (الدعوى السادسة عشر العملية) ***

إذا علم مستقيمان غير أصميين مثل ا ب و ج د وكان المطلوب إيجاداً كبير مقياس مشترك بينهما كهذين



فطريقة ذلك أن يوضع الخط الاصغر ج د على الاكبر ا ب مرة أو أكثر بقدر انحصاره فيه فإذا اشتمل الخط الاكبر ا ب على الخط الاصغر ج د مرة واحدة مثلاً وفضل باق مثل هـ د أصغر من ج د يوضع أيضاً هذا الباقي هـ د على الخط الاصغر ج د فإذا اشتمل الخط ج د على هـ د مرتين مثلاً وفضل باق مثل و د أصغر من هـ د يوضع أيضاً الباقي الثاني و د على الباقي الاول هـ د فإذا اشتمل هـ د على و د ثلاث مرات بدون باق كان و د أكبر مقياس مشترك بين المستقيمين المعلومين ا ب و ج د

لان الباقي الاخير و د انما تحصل باتباع القاعدة المقررة في علم الحساب المستعملة في إيجاد القاسم الاعظم المشترك بين عددين

*** (تنبيه) ***

لايجاد النسبة بين المستقيمين ا ب و ج د بعد معرفة أكبر مقياس مشترك

بينهما يقال حيث تبين ان

$$\begin{aligned} & \text{هـ} = ٣ \text{ د} \\ & \text{د} = ٢ \text{ هـ} + \text{د} = ٦ \text{ د} + \text{د} = ٧ \text{ د} \\ & \text{أ} = ٢ \text{ د} + \text{هـ} = ٧ \text{ د} + ٣ \text{ د} = ١٠ \text{ د} \end{aligned}$$

يكون

$$\text{أ} : \text{د} :: ١٠ : ٧$$

وبقسمة حدى النسبة الثانية على د يكون

$$\text{أ} : \text{د} :: ١٠ : ٧$$

(الدعوى السابعة عشر العملية)

اذا علم قوسان غير اصمين وكان المطلوب ايجاداً كبرمقياس مشترك بينهما فطريقة ذلك أن يقال حيث انه يمكن أن يوضع أحد القوسين على الآخر الذى نصف قطره كنصف قطر القوس الاول كما يمكن أن يوضع مستقيم على مستقيم آخر نحصل أ كبرمقياس مشترك بين القوسين المعلومين بعملية مشابهة للاقى علمات لايجاداً كبرمقياس مشترك بين مستقيمين معلومين

(تنبيه)

اذا علمت زاويتان وكان المطلوب ايجاداً كبرمقياس مشترك بينهما فطريقة ذلك أن يرسم قوسان يحددان اضلاع الزاويتين المعلومتين بشرط أن يكون نصف القطر فى كليهما واحداً ثم يبحث عن أ كبرمقياس مشترك بين هذين القوسين لتعلم النسبة بينهما فتكون النسبة المطلوبة مساوية للنسبة بين هذين القوسين

لانه قد تقرّر فى تنبيه النظرية الثامنة عشر من المقالة الثانية انه اذا كان بين القوسين المأخوذين فى دائرة واحدة أو فى دائرتين متساويتين مقياس مشترك كانت نسبة أحد القوسين الى الآخر كنسبة الزاوية المقابلة للقوس الاول الى الزاوية المقابلة للقوس الثانى

(الدعوى الثامنة عشر العملية)

اذا

اذا علم مستقيمان مثل $ا ب$ و $ح د$ وكان المطلوب ايجاد مقدار مقرب
من النسبة الكائنة بينهما كهذين

$$\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ح}$$

$$\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ح}$$

فطريقة ذلك أن يقال ليكن المطلوب ايجاد نسبة $ا ب$ الى $ح د$ بأقل من
عشر (أى ان المقدار المتروك يكون أقل من عشر) فلذلك يؤخذ الخط $ح هـ$
بقدر عشر $ح د$ ثم يوضع $ح هـ$ على $ا ب$ مرة أو أكثر بقدر عدد مرات
انحصاره فيه فاذا اشتمل $ا ب$ على $ح هـ$ سبع مرات مثلاً وفصل باقى مثل
 $ب و$ أصغر من $ح هـ$ كانت النسبة بين الخطين $ا ب$ و $ح د$ محصورة
بين هذين العددين $\frac{٧}{١٠}$ و $\frac{٨}{١٠}$ فالعدد الاول $\frac{٧}{١٠}$ أقل من النسبة
المطلوبة بأقل من عشر والعدد الثانى $\frac{٨}{١٠}$ أكثر من النسبة المطلوبة بأقل
من عشر

لأنه يلزم من كون $ا ب < ح د \times \frac{٧}{١٠}$ و $ا ب > ح د \times \frac{٨}{١٠}$ أن
تكون نسبة $ا ب$ الى $ح د$ محصورة بين $\frac{٧}{١٠}$ و $\frac{٨}{١٠}$

(تنبيه) *

يمثل هذه الطريقة يتحصل مقدار مقرب من النسبة الكائنة بين قوسين
معلومين أو زاويتين معلومتين عندما يكون مقام الكسر الدال على درجة
التقريب قوة للعدد ٢ غير أن الطريقة الآتية عمومية لأنها صالحة لجميع
الحالات

(الدعوى التاسعة عشر العمالية) *

اذا كان المطلوب ايجاد مقدار مقرب من النسبة الكائنة بين قوسين معلومين
أو زاويتين معلومتين

فطريقة ذلك أن يقال ليكن $ا و ب$ القوسين المعلومين أو القوسين اللذين
نسبتهما تساوى نسبة الزاويتين المعلومتين فلا ييجاد النسبة بين $ا و ب$
مقربة بأقل من سبع مثلاً يضرب المقدار $ا$ فى ٧ ثم يوضع $ب$ على

٧. مرارا بقدر انحصاره فيه فاذا اشتمل ٧ ا على - خمس عشرة مرة
مرة وفضل باق يوجدان

$$١٧ < - ١٥ \times \text{ و } ١٧ > - ١٦ \times$$

فاذن يكون

$$١ < - \frac{١٥}{٧} \times \text{ و } ١ > - \frac{١٦}{٧} \times$$

ويعلم من ذلك أن نسبة ١ الى - محصورة بين $\frac{١٥}{٧}$ و $\frac{١٦}{٧}$ فالمقدار
الاول $\frac{١٥}{٧}$ ينقص عن النسبة المطلوبة بأقل من سبع والمقدار الثاني $\frac{١٦}{٧}$
يزيد على النسبة المطلوبة بأقل من سبع

(تنبيه)

اعلم انه يمكن استعمال هذه الطريقة لايجاد مقدار يقرب من النسبة الكائنة
بين مستقيمين معلومين

(الدعوى العشرون العملية)

٤ (شكل ١٥٤ من اللوحة ٦)*

اذا كان المطلوب ايجاد نسبة تقريبية بين قطر المربع وضلعه
فطريقة ذلك ان يقال ليكن ا- ح د مربع ا د قطر ه فلايجاد نسبة
تقريبية بين القطر ا د والضلوع ح د يوضع الضلع ح د على القطر
ا د وذلك بان تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر ح د ويركز في النقطة د ويرسم
نصف دائرة فيظهر أن القطر ا د قدر الضلع ح د مرة واحدة ويبقى
كسر مثل ا د أصغر من ح د فاذن يكون

$$\frac{ا}{ح} = ١ + \frac{ا}{ح} = ١ + \frac{ا}{ح} \dots (١)$$

ولعسرة مقدار الكسر ا د يقال يلزم من كون الزاوية ا- ح قائمة
أن يكون الخط ا- مماسا للمعيط ويلزم من هذا أن يكون

$$ا د : ا- :: ا- : ا ه \text{ أو}$$

$$\frac{ا}{ا-} = \frac{ا-}{ا ه}$$

وحيث ان الخط ا ه يشتمل على ا- مرتين ويبقى كسر مثل ا د أصغر

من أ- يكون

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

وبهذا نؤول المعادلة (١) الى هذه الصورة

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} + 1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} \quad (٢)$$

وحيث ان $\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$ يكون

$\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} + 1 = \frac{1}{\frac{3}{2}}$ ويعلم من ذلك أن هذا الكسر كسر متسلسل غير منتهى فاذا حسب مقدار هذا الكسر الى الحد الرابع يوجد أن

$$\frac{41}{29} = \frac{12}{29} + 1 = \frac{1}{2}$$

أى ان النسبة التقريبية بين قطر المربع وضلعه هى :: ٤١ : ٢٩
واذا حسبت جله حدودا أكثر من السابقة سهل تحصيل نسبة أكثر قربا من
هذه النسبة وقد ذكرنا فى النتيجة الثانية من النظرية العاشرة ان نسبة قطر
المربع لضلعه كنسبة جذرا الاثنين للواحد وبما ذكر يحل ما ذكره من الامثلة
فنقول

• (المثال الاول) •

أن يكون المطلوب إيجاد قطر المربع الذى ضلعه خمسة أذرع
فطريقة ذلك أن يضرب مقدار الضلع المعلوم فى هذه النسبة $\frac{41}{29}$
فاذن يكون

$$٧ + \frac{2}{29} = \frac{200}{29} = \frac{41}{29} \times ٥ =$$

او يضرب مقدار الضلع المعلوم فى $\sqrt{2}$ فيحصل المطلوب

• (المثال الثانى) •

أن يكون المطلوب إيجاد ضلع المربع الذى قطره واحد عشر ذراعا
فطريقة ذلك أن يضرب مقدار القطر المعلوم فى هذه النسبة $\frac{29}{41}$ او يقسم
القطر المعلوم على $\sqrt{2}$ فيحصل المطلوب

• (الدعوى الحادية والعشرون العملية) •

إذا كان المطلوب إيجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مستطيلين معلومين

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف α لأحد بعدي المستطيل الأول وبالحرف β لبعده الآخر وبالحرفين α' و β' لبعدي المستطيل الثاني وبالحرفين γ و γ' للمستقيمين المطلوبين ثم يقال حيث $\alpha \gamma = \beta \gamma'$ كان المطلوب أن يكون

$$\gamma : \gamma' :: \alpha : \beta$$

$$\gamma = \frac{\alpha \gamma' - \beta \gamma'}{\alpha - \beta}$$

وحيث أن أحد الخطين اختياري فلأمانع من فرض الخط γ مساويا للخط γ' أو الخط α فإذا جعل $\gamma = \alpha$ آت المعادلة السابقة إلى هذه

$$\gamma = \frac{\alpha \gamma' - \beta \gamma'}{\alpha - \beta} \text{ ومن هذه المعادلة ينتج أن } \alpha : \beta :: \gamma : \gamma'$$

$$\alpha : \beta :: \gamma : \gamma'$$

فيعلم من ذلك أن ثاني الخطين المطلوبين γ رابع متناسب مع الخطوط الثلاثة α و α' و β فإذا بحث عن هذا الرابع المتناسب كانت نسبته إلى الخط α مساوية لنسبة المستطيل $\alpha \gamma$ إلى المستطيل $\alpha' \beta$ وبما ذكر يحمل ما ذكره من الأمثلة فنقول

• (المثال الأول) •

أن يكون المطلوب إيجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مربعين معلومين مثل α و α' فطريقة ذلك أن يبحث عن الثالث متناسب مع الخطين α و α'

• (المثال الثاني) •

أن يكون المطلوب إيجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين
مثالين أو شكاكين كثيرى الاضلاع معلومين فطريقة ذلك أن يقال حيث
انه يمكن تحويل أى شكل كثير الاضلاع الى مربع يكافئه يعلم من ذلك انه
لايجاد المستقيمين المطلوبين يلزم ان يبحث عن ضلع المربع المكافئ لاحد
الشكاكين المعلومين وعن ضلع المربع المكافئ للشكل الآخر فالثالث
المتناسب مع ضلعى هذين المربعين يكون هو المطلوب

• (المثال الثالث) •

اذا كان المطلوب إيجاد مستقيمين مثل $ص$ و $و$ تكون نسبة احدهما
الى الآخر كنسبة حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة مثل $ا$ و $ب$
و $ح$ الى حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة كذلك مثل

$آ$ و $س$ و $ح$

فطريقة ذلك أن يقال حيث كان المطلوب أن يكون

$$ص : و :: ا \times ب \times ح : آ \times س \times ح$$

ينتج من ذلك أن

$$ص = \frac{ا \times ب \times ح \times و}{آ \times س \times ح}$$

وحيث ان احد الخطين المطلوبين اختياري يمكن ان يجعل $ص = ح$
وحيث يكون

$$ص = \frac{ا \times ب \times ح \times و}{آ \times س \times ح} = \frac{ا \times ب \times و}{آ \times س}$$

فيعلم من هذه المعادلة انه يلزم أن يبحث اولاً عن الرابع المتناسب مع الخطوط

الثلاثة $آ$ و $ا$ و $ب$ وليكن $د$ مثلاً وثانياً عن الرابع المتناسب مع

الخطوط الثلاثة $س$ و $د$ و $ح$ وليكن $ل$ فيكون $ل$ مساوياً

لمقدار الخط المجهول $ص$ وحينئذ يكون

$$ل : ص :: ١ : ١ - ٧ : ٧ : ٧ - ٧ : ٧ - ٧$$

• (المثال الرابع) •

أن يكون المطلوب إيجاد مستقيمين مثل $ص$ و $ص$ تكون نسبة
أحدهما إلى الآخر كنسبة حاصل ضرب أربعة خطوط مستقيمة معلومة
مثل ١ و ٧ و ٧ و ٧ إلى حاصل ضرب أربعة خطوط مستقيمة

معلومة كذلك مثل ١ و ٧ و ٧ و ٧
فطريقة ذلك أن يقال حيث كان المطلوب أن يكون

$$ص : ص :: ١ : ١ - ٧ : ٧ : ٧ - ٧ : ٧ - ٧$$

ينتج أن

$$\frac{١ - ٧ : ٧ : ٧ - ٧ : ٧ - ٧}{١ - ٧ : ٧ : ٧ - ٧ : ٧ - ٧} = ص$$

وحيث أن أحد الخطين اختياري يمكن أن يجعل $ص = ٧$ وحينئذ
يكون

$$ص = \frac{١ - ٧ : ٧ : ٧ - ٧ : ٧ - ٧}{١ - ٧ : ٧ : ٧ - ٧ : ٧ - ٧}$$

فيعلم من هذه المعادلة أنه يلزم أن يبحث أولاً عن الرابع المناسب مع الخطوط

الثلاثة ١ و ٧ و ٧ وليكن $ل$ مثلاً وثانياً عن الرابع المناسب مع

الخطوط الثلاثة ٧ و $ل$ و ٧ وليكن $ل$ وثالثاً عن الرابع

المناسب مع الخطوط الثلاثة ٧ و $ل$ و ٧ وليكن $ل$ فيكون أحد

المستقيمين المطلوبين $ص = ل$ والمستقيم الآخر $ص = ٧$
فأذن يكون

$$ل : ٧ :: ١ : ١ - ٧ : ٧ : ٧ - ٧ : ٧ - ٧$$

وهو المطلوب

وكل مثال من هذا القبيل يحل بانظر بقية المذكورة

* (الدعوى الثانية والعشرون العمالية) *

* (شكل ١٤٦ من اللوحة ٦) *

إذا كان المطلوب انشاء مثلث يكافئ شكلاً كثيراً الاضلاع معلوماً فطريقة ذلك أن يقال ليكن ABC الشكل المعلوم في وصل AC والنتار BC الذي يفصل المثلث ABC ثم يرسم من النقطة C مستقيم مثل CD يوازي BC ويمتد حتى يقطع الامتداد AB ثم يوصل AD فيكون الشكل الكثير الاضلاع $ABCD$ مكافئاً للشكل ABC والناتق من ضلعا AC والمثلثين ABC و ADC قاعدته مشتركة هي BC وارتفاعها مشتركة لان رأسيهما C و D موضوعان على الخط BD الموازي للقاعدة فاذن يكون هذان المثلثان متكافئين فاذا اضيف الى كل منهما الشكل ACD ينتج أن الشكل $ABCD$ مكافئ للشكل ABC وبمثل هذا يكون فصل الزاوية B بان يبدل المثلث ABC بالمثلث ADC المكافئ له وحينئذ يتحول الخمس $ABCD$ الى مثلث يكافئه وهو ADC

وهذه الطريقة يمكن تطبيقها على أي شكل كثيراً الاضلاع كأنما كان عدد أضلعه n لان الشكل الذي يكون عدداً ضلعه m مثلاً يتحول في المرة الاولى الى شكل يكافئه عدداً ضلعه $m-1$ وهذا يتحول الى شكل آخر يكافئه عدداً ضلعه $m-2$ وهكذا فلا بد أن ينتهي هذا التجويل الى مثلث يكافئ الشكل المفروض

* (تنبيه) *

قد تقدم أن كل مثلث يكون تحويله الى مربع يكافئه وذكرنا عملية ذلك في الدعوى السابعة العملية فينتهز يمكن دائماً انشاء مربع يكافئ مضاماً

مستويا معلوما وهذا هو المسمى بتربيع الشكل المستقيم الاضلاع
ومسئلة تربيع الدائرة مقصورة على ايجاد مربع يكافئ دائرة قطرها معين
* (الدعوى الثالثة والعشرون العملية) *

* (شكل ١٤٧ من اللوحة ٦) *

اذا كان المطلوب انشاء مربع يساوى مجموع مربعين معلومين الوضاهما
قطر يقـ ذلك أن يقال ليكن a ضلع احد المربعين المعلومين و b ضلع
المربع الآخر فلا يجاد مربع يساوى مجموع هذين المربعين يرسم مستقيمان
متعامدان مثل $هـ و هـ ح$ غير متناهيين ثم يؤخذ $هـ د$ بقدر الضلع
 a و $هـ ر$ بقدر الضلع b ويوصل $د ر$ فيكون $د ر$ هو ضلع المربع
المطلوب

لانه يلزم من كـون المثلث $د هـ ر$ قائم الزاوية في $هـ$ أن يكون المربع
المنشأ على الوتر $د ر$ مساويا لمجموع المربعين المنشأين على الضلعين $د هـ$
و $هـ ر$ فاذن يكون

$$د ر^2 = د هـ^2 + هـ ر^2$$

وحيث ان $د هـ = ا$ و $هـ ر = ب$ يكون

$$د ر^2 = ا^2 + ب^2$$
 وهو المطلوب

ولا يجاد مربع يساوى فاضل هـذين المربعين المعلومين يرسم مستقيمان
متعامدان مثل $ح و هـ و$ غير متناهيين ثم يؤخذ البعد $هـ ر$
بقدر أصغر الضلعين المعلومين $ا و ب$ ثم تؤخذ قمتها بالبيكار بقدر البعد
 $ر ح$ المساوى لأكبر الضلعين المعلومين $ا و ب$ ويركز في النقطة $ر$
ويرسم قوس دائرة يتقطع الخط $هـ ح$ في نقطة مثل $ح$ فيكون $هـ ح$

هو ضلع المربع المساوى للفاضل بين المربعين المعلومين $ا و ب$

لانه يلزم من كون المثلث $هـ ر ح$ قائم الزاوية في $هـ$ أن يكون المربع
المنشأ على الضلع $هـ ح$ مساويا للفاضل بين مربع الوتر $ر ح$ ومربع

الضلع الآخر هـ ر أعني أن

$$\text{هـ ح} = \text{ر ح} - \text{هـ ر}$$

وحيث أن ر ح = أ و هـ ر = ب يكون

$$\text{هـ ح} = \text{أ} - \text{ب} \text{ وهو المطلوب}$$

(تنبيه)

يمكن إيجاد مربع يساوي مجموع مربعات بقدر ما يراد لان العملية التي بواسطتها يتحول المربعات الى مربع واحد يتحول بها ثلاث مربعات الى مربعين وهذان المربعان يتحولان الى واحد وكذا يمكن إيجاد مربع يساوي بالفاضل بين جملة مربعات وجملة مربعات اخرى أقل من مجموع الاول

(امثلة)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب إيجاد مربع يساوي مجموع ثلاثة مربعات معلومة فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف سـ ضلع المربع المطلوب وبالحرف حـ ضلع المربع الاول وبالحرف دـ ضلع المربع الثاني وبالحرف هـ ضلع المربع الثالث فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{سـ} = \text{حـ} + \text{دـ} + \text{هـ}$$

ويعلم من هذه المعادلة انه يلزم أن يبحث عن مربع يساوي مجموع المربعين

الاقاين حـ و دـ وليكن مـ ثم يبحث عن مربع يساوي مـ + هـ

وليكن كـ فيكون كـ هو المربع المطلوب

وعملية الرسم أن ترسم زاوية قائمة مثل ا ح كافي (الشكل ٢٩٣)

ويؤخذ البعد ا ح = دـ والبعد ا دـ = حـ ويوصل دـ حـ ثم يقام

العمود دـ و على حـ ويؤخذ البعد دـ هـ = هـ ويوصل هـ حـ

فيكون هـ د هـ ضلع المربع المطلوب

(المثال الثاني)

أن يكون المطلوب ايجاد مربع يساوى الفاضل بين خمسة مربعات معلومة وثلاثة مربعات اخر معلومة كذلك

فطريقة ذلك أن يرخص بالحرف سه اضلع المربع المطلوب وبالحروف ا

و - و ح و د و هـ لاضلاع المربعات الخمسة وبالرموز ا

و س و هـ لاضلاع المربعات الثلاثة التي يراد طرحها من المربعات الاول فعلى منطوق المثال يكون

$$س^2 = ا^2 + س^2 + ح^2 + د^2 + هـ^2 - ا^2 - س^2 - ح^2 - د^2 - هـ^2 \text{ أو}$$

$$سه = ا + س + ح + د + هـ - (ا + س + ح + د + هـ)$$

ويعلم من هذه المتساوية انه يلزم أن يبحث أولاً عن مربع مثل م يساوى

بمجموع المربعات ا و س و ح و د و هـ وثانياً عن مربع مثل م

يساوى بمجموع المربعات ا و س و ح و د ثم يبحث عن مربع مثل د

يساوى الفاضل بين هذين المربعين م و م فيكون د هو المربع المطلوب

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المساوى لمجموع مربعين ضلع

أحدهما يساوى أربع أذرع وضلع الآخر يساوى ثلاث أذرع فطريقة

ذلك أن يرخص بالحرف سه لاضلع المطلوب فعلى منطوق المسئلة يكون

$$سه = س^2 + هـ^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$س = \sqrt{٢٥} = ٥$$

أعني ان ضلع المربع المطلوب يساوي خمسة أذرع
* (المثال الرابع) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المساوي لفاصل مربعين ضلع
أحدهما يساوي ثلاثة عشر ذراعا وضلع الآخر يساوي اثني عشر ذراعا
فطريقة ذلك أن يرهن بالحرف س للضلع المطلوب فملى منطوق المثال
يكون

$$س = \sqrt{١٢} - \sqrt{١٢٩} = ١.٤٤ - ١.٦٩ = ٢٥$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$س = \sqrt{٢٥} = ٥$$

أعني ان ضلع المربع المطلوب يساوي خمس أذرع

* (الدعوى الرابعة والعشرون العملية) *

* (شكل ١٥٠ من اللوحة ٦) *

إذا كان المطلوب انشاء مربع نسبته الى المربع المعلوم $ا - ب$ كنسبة
خط معلوم مثل $ك$ لخط آخر كذلك مثل $ل$
فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه مثل $هـ ر$ ويؤخذ عليه البعد
 $هـ و = ك$ والبعد $و ر = ل$ ويرسم نصف محيط قطره $هـ ر$ ويقام
من النقطة $و$ العمود $و ح$ على القطر ثم يوصل الوتران $هـ و$ و $ح ر$
ويتدان بغير تحديد ثم يؤخذ $ح ع$ يساوي $ا - ب$ الذي هو ضلع المربع
المعلوم ثم يمد من النقطة $ع$ مستقيم مثل $ع ط$ يوازي $هـ ر$ فيكون
 $ع ط$ ضلع المربع المطلوب

لأنه يلزم من توازي $هـ ر$ و $ع ط$ أن يكون

$$ع ط : ع ح :: ح و : ح ر$$

وقد تقر في علم الحساب ان المقادير المتناسبة مربعاتها متناسبة فاذن يكون

$\overline{حط} : \overline{حع} :: \overline{حه} : \overline{حز} \dots\dots\dots (١)$

وحيث ان المثلث ه ح ر قائم الزاوية في ح يكون

$\overline{حه} : \overline{حز} :: \overline{هو} : \overline{ور} :: \overline{الخط ك} : \overline{الخط ل}$

كما تقرر ذلك في النظرية الثالثة والعشرين ويلزم من اشتراك نسبة $\overline{حه} : \overline{حز}$

: $\overline{حز} : \overline{حه}$ في هذه المناسبة وفي المناسبة (١) أن يكون

$\overline{حط} : \overline{حع} :: \overline{الخط ك} : \overline{الخط ل}$

وحيث كان $\overline{حع} = \overline{ا ب}$ يلزم أن يكون

$\overline{حط} : \overline{ا ب} :: \overline{الخط ك} : \overline{الخط ل}$

والمطلوب أن يكون

$\overline{سه} : \overline{ا ب} :: \overline{الخط ك} : \overline{الخط ل}$

فاذن يكون $\overline{سه} = \overline{حط}$ وهو المطلوب.

(امثلة)

(المثال الاقل)

اذا علم مربع مثل $\overline{ا ب ح د}$ كافي (الشكل ٢٩٤) وكان المطلوب انشاء مربع ضعفه

فطريقة ذلك أن يوصل القطر $\overline{ب د}$ ويؤخذ $\overline{ه ه}$ بقدر $\overline{ب د}$ فيكون $\overline{ه ه}$ ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون $\overline{ب د} = \overline{ب ح} + \overline{ح د} = \overline{ب د}^2$ أن يكون

$\overline{ه ه}^2 = \overline{ب د}^2$ وهو المطلوب

(المثال الثاني)

اذا علم مربع مثل $ا ب د$ كافي (الشكل ٢٩٤) وكان المطلوب البناء
مربع يكون ثلاثة أمثاله في السطح

فطريقة ذلك أن يوصل القطر $د ه$ ويؤخذ $ه ز$ بقدر $د ه$ ثم يقام
العمود $ه و$ على $د ه$ ويؤخذ $و ح$ حتى يقطع $د ه$ ثم يؤخذ $ح ع$
بقدر $د ه$ ويوصل $ع و$ فيكون $ح و$ ضلع المربع المطلوب

لأنه يلزم من كون $ح و = ح ه + ه و$

$ه و = ح و$ أن يكون

$ح و = ح ه + ه و$ وهو المطلوب

(طريقة أخرى)

ليمكن من ضلع المربع المطلوب $ح$ ضلع المربع المعلوم فعل منطوق
المثال يكون

$$س ه = ٣ د أو س ه = ٤ د$$

ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$د : س ه :: د : ٣ د$$

فيعلم من هذه التناسبات أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين $س ه$ و $د$
أحد هما يساوي ضلع المربع المعلوم والآخر يساوي ثلاثة أمثاله

(المثال الثالث)

اذا علم مربع مثل $د$ وكان المطلوب إيجاد مربع آخر مساحته مساوية
لمساحة المربع المعلوم مضروبة في كمية معينة مثل $م$

فطريقة ذلك أن يقال ليكن $س ه$ ضلع المربع المطلوب فعل منطوق المثال
يتسكون

$$س ه = د \times م = د \times م$$

ويعلم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما
يساوى ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى حاصل ضرب هذا الضلع
في الكمية المراد ضرب المربع المعلوم فيها فإنه إذا بحث عن الوسط المتناسب
الذكور وانشئ عليه مربع كان هو المربع المطلوب

(المثال الرابع)

إذا علم مربع ضلعه δ وكان المطلوب إيجاد ضلع مربع آخر مساحته مساوية
لمساحة المربع المعلوم فتسوية على كمية معينة مثل m
فطريقة ذلك أن يتقال ليكن s ضلع المربع المطلوب فعلى منطوق المثال
يكون

$$s^2 = m^2 = \delta \times \frac{\delta}{m} = \delta \times \frac{\delta}{m}$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$\delta : s :: s : m$$

فيه لم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين δ و m فلا يجاد
مقدار الضلع s يرسم نصف محيط دائرة قطره يساوى ضلع المربع المعلوم
 δ ويقسم هذا القطر إلى أقسام متساوية عددها يساوى m ثم يتقام من
النقطة s التي هي النهاية المشتركة بين القسم الأول والثاني عمود على
القطر ويمتد حتى ينتهي إلى المحيط ثم يوصل الوتر s فيكون s هو
ضلع المربع المطلوب

$$\text{لان } \delta : s :: s : m$$

وحيث أن $\delta = s \times m$ يكون

$$\delta : s :: s : m$$

وبقعة حتى النسبة الثانية على s يكون

$$\delta : s :: s : m$$

أو $\frac{ع}{م} :: \frac{ع}{م} : ١$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$\frac{ع}{م} = \frac{ع}{م}$ وهو المطلوب

فإذا كان المطلوب إيجاد مربع مساحته خمس مساحة مربع معلوم مثل $\frac{ع}{م}$ يبحث عن الوسط المناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ضلع المربع المعلوم $\frac{ع}{م}$ والآخر يساوى خمسة ثم ينشأ على الوسط المناسب المذكور مربع يكون هو المطلوب

وإذا كان المطلوب إيجاد مربع مساحته خمسة أمثال مساحة مربع معلوم مثل $\frac{ع}{م}$ يبحث عن الوسط المناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ضلع المربع المعلوم $\frac{ع}{م}$ والآخر يساوى خمسة أمثاله ثم ينشأ على الوسط المناسب المذكور مربع يكون هو المطلوب

* (المثال الخامس) *

أن يكون المطلوب إنشاء مربع نسبته إلى مربع معلوم كنسبة $\frac{ع}{م}$ إلى $\frac{ع}{م}$

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم $\frac{ع}{م}$ كيف اتفق ويجعل وحدة خطية ثم يرسم مستقيم غيره تناسله مثل $\frac{ع}{م}$ كما في (الشكل ١٥٠) من اللوحة ٦ ويؤخذ عليه بعد مثل $\frac{ع}{م}$ يساوى ثلاثة أمثال الوحدة المذكورة ثم يؤخذ بجانبه بعد مثل $\frac{ع}{م}$ يساوى خمسة أمثال الوحدة المذكورة ويرسم نصف محيط دائرة قطرها $\frac{ع}{م}$ ويقام من النقطة $\frac{ع}{م}$ العمود $\frac{ع}{م}$ على الخط ثم يوصل الوتران $\frac{ع}{م}$ و $\frac{ع}{م}$ ويتان بغير تحديد ثم يؤخذ $\frac{ع}{م}$ بقدر ضلع المربع المعلوم ويؤخذ من النقطة $\frac{ع}{م}$ مستقيم مثل $\frac{ع}{م}$ يوازي $\frac{ع}{م}$ فيكون $\frac{ع}{م}$ مساويا لضلع المربع المطلوب

أعني أن نسبة المربع المنشأ على $\frac{ع}{م}$ إلى المربع المعلوم كنسبة الثلاثة

لعمدة

(حل آخر)

ليكن $م$ ضلع المربع المطلوب و $ح$ ضلع المربع المعلوم فعلى منطوق المثال يكون

$$م : ح :: ح : ح$$

ومن هذه التناسبة ينتج أن

$$م \times ح = ح \times ح = ح^2$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$م : ح :: ح : ح$$

فيعلم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى ثلاثة أخماسه

(الدعوى الخامسة والعشرون العملية)

(شكل ١٢٩ من اللوحة ٥)

إذا علم شكل مستقيم الاضلاع مثل $ا-ح-د$ وكان المطلوب إنشاء شكل مشابه له على ضلع معلوم مثل $و-ر$ الذى هو نظير الضلع $ا-ح$

فطريقة ذلك أن توصل اقطار الشكل المعلوم وهى $ا-ح$ و $ا-د$ الخ ثم تنشأ فى النقطة $و$ زاوية مثل $ر-و-ح$ تساوى الزاوية $ا-ح-د$ وتنشأ فى النقطة $ر$ زاوية مثل $ر-و-د$ تساوى الزاوية $ا-ح-د$ فالمثلث $و-ر-د$ الحادث من تلاقى الخطين $و-ر$ و $و-د$ يكون مشابهاً للمثلث $ا-ح-د$ وكذا ينشأ مثلث مثل $و-ح-ط$ على الضلع $و-ح$ الذى هو نظير الضلع $ا-ح$ يشابه المثلث $ا-ح-د$ وينشأ أيضاً مثلث مثل $و-ط-د$ على الضلع $و-ط$ الذى هو نظير الضلع $ا-د$ يشابه المثلث $ا-ح-د$ فالشكل الحادث $و-ر-ح-ط-د$ يكون هو الشكل المطلوب المشابه لكثير الاضلاع المعلوم $ا-ح-د-ه$ لان هذين الشكلين مركبان من عدد واحد من المثلثات المتشابهة والمتماثلة:

الوضع

(الدعوى ١٢٩)

• (الدعوى السادسة والعشرون العملية) •

اذا علم شكلان متشابهان وكان المطلوب انشاء شكل يشابههما ويساوى مجموعهما او فاضلهما

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف $ح$ لمساحة أحد الشكلين وبالحرف $ا$ لآخر فاضلاعه وبالحرف $ك$ لمساحة الشكل الآخر وبالحرف $هـ$ لاضلعه المناظر للضلع $ا$ وبالحرف $و$ لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف $ز$ لاضلعه المناظر لكل من الضلعين $ا$ و $هـ$ ثم يقال حيث ان نسبة الاشكال المتشابهة الى بعضها كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة الى بعضها يكون

$$ح : ك :: ا : هـ$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$ح : ح + ك :: ا : ا + هـ$$

وكذا يكون

$$ح : هـ :: ا : ز$$

وحيث كان المطلوب أن يكون $هـ = ح + ك$ ينتج من مقارنة هذه المناسبة بالسابقة أن

$$هـ = ا + هـ$$

فيعلم من ذلك أن الضلع $هـ$ وتر مثلث قائم الزاوية ضلعا المحيطان بزاويته القائمة هما $ا$ و $هـ$ فحينئذ انشئ على الضلع $هـ$ شكل مشابه للشكل $ح$ أو الشكل $ك$ يكون هو الشكل المطلوب أى المساوى لمجموعهما

واذا كان المطلوب أن يكون الشكل $هـ$ مساويا لفاضل الشكلين المعلومين $ح$ و $ك$ أى $هـ = ح - ك$ يقال حيث ان

ح : ك :: أ : ب يلزم أن يكون

ح : ع - ك :: أ : ب - أ - ب وكذا يكون

ح : ب :: أ : ب

فيخرج من مقارنة هاتين النسبتين أن

ب - أ = أ - ب

ويعلم من ذلك أن الضلع ب هو ضلع من مثلث قائم الزاوية وتره أ وضلعه الآخر ب وأنه إذا انشئ على الضلع ب شكل مشابه للشكل ح أول الشكل ك يكون هو الشكل المطلوب أي المساوي لفاضلهما

• (الدعوى السابعة والعشرون العملية) •

إذا كان المطلوب إنشاء شكل يشابه شكلاً معلوماً وتكون نسبتة إليه كنسبة مقدار معين مثل ب إلى مقدار آخر كذلك مثل د

فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف ح مساحة الشكل المعلوم وبالحرف أ لاضلاعاً وبالحرف ب مساحة الشكل المطلوب وبالحرف ب لاضلعه المناظر للضلع أ فعلى منطوق المسئلة يكون

ب : د :: ح : م

وحيث أن هذين الشكلين متشابهان يكون

ب : د :: ح : ب

فيخرج من هاتين النسبتين أن

ب - أ = أ - ب

فحينئذ يتعين الضلع ب بالطريقة المقررة في الدعوى الرابعة والعشرين العملية وبعد تعيينه ينشأ عليه شكل مشابه للشكل المعلوم ح فيكون هو المطلوب

• (أمثلة) •

* (امثلة) *

* (المثال الاول) *

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلاً معلوماً ومساحته ربع مساحة الشكل المعلوم

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعد يساوي نصف أحد اضلاع الشكل المعلوم ويعتبران ضلعين متناظرين ثم ينشأ على هذا البعد شكل يشابه الشكل المعلوم فيكون هو الشكل المطلوب

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلاً معلوماً ومساحته تسعة أمثال مساحة الشكل المعلوم

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعد يساوي ثلاثة أمثال أحد اضلاع الشكل المعلوم ويعتبران ضلعين متناظرين ثم ينشأ على هذا البعد شكل يشابه الشكل المعلوم فيكون هو الشكل المطلوب

* (المثال الثالث) *

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلاً معلوماً ونسبة مساحته الى مساحة الشكل المعلوم كنسبة الثلاثة الى السبعة

فطريقة ذلك أن يرمن بالحرف ح لمساحة الشكل المعلوم وبالحرف ا لأحد اضلاعه وبالحرف س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر للضلع ا فعلى منطوق المثال يكون

$$ص : ح :: ٣ : ٧$$

وحيث ان هذين الشكلين متشابهان يكون

$$ص : ح :: ص : ا$$

فينتج من هاتين المتناسبتين أن

$$ص : ا :: ٣ : ٧$$

نخبة من الذين اطلع صه كافي المثال الخامس من الدعوى الرابعة
والعشرين العملية وبعد تعيينه ينشأ عليه شكل مشابه للشكل المعلوم ح
فيكون هو الشكل المطلوب

• (الدعوى الثامنة والعشرون العملية) •

• (شكل ١٥١ من اللوحة ٦) •

إذا كان المطلوب إنشاء شكل يشابه شكلاً معلوماً مثل الشكل كه ويكون
شكلاً آخر معلوماً كذلك مثل الشكل ل
فطريقة ذلك أن يرمن بالحرف ا ل أحد أضلاع الشكل كه وبالحرف
مه لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف صه لضعه المناظر للأضلاع ا
ثم يقال حيث كان المطلوب أن يكون الشكل مه مشابهاً للشكل كه
يلزم أن يكون

$$ك : مه :: ا : صه$$

وحيث كان المطلوب أيضاً أن يكون الشكل مه مكافئاً للشكل ل يلزم
أن يكون

$$ك : ل :: ا : صه$$

نخبة إذا بحث عن المربع م المكافئ للشكل كه وعن المربع كه
المكافئ للشكل ل يكون

$$م : كه :: ا : صه$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$م : ل :: ا : صه$$

فيعلم من هذه المناسبة أن الضلع صه رابع متناسب مع الخطوط الثلاثة
م و كه و ا ومن هنا تنتج طريقة رابعة هي

أن يبحث عن ضلع المربع المكافئ للشكل كه وعن ضلع المربع المكافئ

لشكلاً

لـ الشكل لـ ثم يبحث عن الرابع المناسب مع هذه الخطوط الثلاثة وينشأ عليه شكل مشابه للشكل كـ فيكون هو الشكل المطلوب

• (أمثلة) •

• (المثال الأول) •

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوي الاضلاع يكافئ شبه منحرف معلوما
رمزه لـ

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كـ كيف اتفق مثل اـ وينشأ عليه مثلث متساوي الاضلاع يرمله بالحرف كـ ثم يبحث عن ضلع المربع المكافئ للشكل كـ ويرمله بالحرف مـ وعن ضلع المربع المكافئ للشكل لـ ويرمله بالحرف نـ وعن الرابع المناسب مع الخطوط الثلاثة مـ و نـ و اـ ثم ينشأ عليه مثلث متساوي الاضلاع فيكون هو المثلث المطلوب أي المكافئ لشبه المنحرف المعلوم

• (المثال الثاني) •

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوي الاضلاع يكافئ شكلاً متوازي الاضلاع معلوما رمزه لـ

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق مثل اـ وينشأ عليه مثلث متساوي الاضلاع يرمله بالحرف كـ ثم تتم العملية كما في المثال الأول

• (المثال الثالث) •

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوي الاضلاع يكافئ مثلثا مختلف الاضلاع معلوما رمزه لـ

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق مثل اـ وينشأ عليه مثلث متساوي الاضلاع يرمله بالحرف كـ ثم تتم العملية كما في المثال الأول

• (المثال الرابع) •

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوي الاضلاع يكافئ شكلاً متساوياً معلوما رمزه لـ

فطريقة ذلك أن يحول الخمس الى مثلث يكافئه ثم يحول هذا المثلث الى مثلث
متساوي الاضلاع فيكون هو المطلوب

تمت المقالة الثالثة على يد جامعه المتوكل على ربه المعيد المبدي
على عزت أفندي أحد خوجات العلوم الطبيعية
والرياضية بمدرسة المهندسة بخانة الخديوية
ووكيل المدرسة التجهيزية
والمدرسة الابتدائية

• (دروس في المقالة الرابعة) •

المقالة الرابعة يبحث فيها عن خواص الاشكال المستقيمة الاضلاع المنتظمة ومساحة الدائرة

• (تعريف) •

الشكل المنتظم ما تساوت زواياه واضلاعه فكل شكل مستقيم الاضلاع يكون منتظما اذا تساوت زواياه واضلاعه سواء كان مثلثا أو شكلارباعيا أو خمسا أو سدسا أو غير ذلك

• (الدعوى الاولى النظرية) •

• (شكل ١٥٥ من الملاحظة ٦) •

كل شكلين منتظمين متحدين في عدد الاضلاع يكونان متشابهين
فاذا كان الشكل ا ب ح د ه و مسدسا منتظما و ر ح ط ع ه ل
مسدسا آخر كذلك كان مجموع الزوايا المحيطية في الشكل الاول مساويا لثماني
قوائم كما تقرر ذلك في النظرية التاسعة والثلاثين من المقالة الاولى ومجموع
الزوايا المحيطية في الشكل الثاني يساوى ثمانى قوائم ويلزم من هذا أن تكون
الزاوية ا = سدس الثمان قوائم والزاوية ر = سدس الثمان قوائم
فاذن تكون الزاوية ا = للزاوية ر والزاوية س = ح والزاوية
• = ط وهكذا

ويلزم من كون الشكل الاول منتظما أن يكون

$$ا ب = ب ح = ح د = د ه = ه و = و ا$$

وكذا يلزم من كون الشكل الثانى منتظما أن يكون

$$ر ح = ح ط = ط ع = ع ك = ك ل = ل ر$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$ا ب : ر ح :: ب ح : ح ط :: ح د : د ع :: د ه : ه ك :: ه و : و ا :: و ا : ر ح$$

فاذن يكون الشكل ا ب ح د ه و متشابهيا للشكل ر ح ط ع ك ل

كانت في النظرية السابعة والعشرين من المقالة الثالثة

• (نتيجة) •

النسبة بين محيطي كثيري الاضلاع المنتظمين المتحدين في عدد الاضلاع كالنسبة بين ضلعين متناظرين والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي ضلعين متناظرين لان الشكلين اللذين بهما المثلثان متشابهان وقد تقررت في النظرية الثامنة والعشرين من المقالة الثالثة أن النسبة بين محيطي كثيري الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين وأن النسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي ضلعين متناظرين

• (تنبيه) •

يتمين مقدار زاوية أي شكل منتظم عدد اضلاعه معين بتقسيم مجموع زواياه على عدد اضلاعه كما يتمين مقدار زاوية أي شكل متساوي الزوايا عدد اضلاعه معين انظر الدعوى التاسعة والثلاثين من المقالة الاولى

• (الدعوى الثانية النظرية) •

• (شكل ١٥٦ من اللوحة ٦) •

كل شكل منتظم يمكن رسمه في الدائرة ورسم دائرة فيه (برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن $A - B - C - D$ الخ شكلا منتظما فلو تصور مرور محيط دائرة بالنقط الثلاث $A - B - C$ وكان مركزه P وانزل العمود PE على BC ووصل PA و PD ليكن الشكل الرباعي $PE - C - D - A$ مساويا للشكل الرباعي $PE - B - A$ لانه لو جعل الضلع PE فصلا مشتركا وطبق الشكل $PE - C - D - A$ على الشكل $PE - B - A$ لانطبقت الزاوية القائمة $C - E - P$ على القائمة $B - E - P$ ووقعت النقطة C على النقطة B ويلزم من كون الشكل $A - B - C - D$ منتظما أن تكون الزاوية $D - C - B = A - B - C$ وأن يقع الضلع $C - D$ على استقامة الضلع $B - A$ وحيث أن $C - D = B - A$ تقع النقطة D في A ويحدد الشكل لان الرباعيان غيبتا يكون البعد PD

متساويا

مساويا للبعد ط ا ويلزم من هذا أن تكون النقطة د على المحيط الذي يمر بالنقط الثلاث ا و - و و يمثل هذا برهن على ان المحيط الذي يمر بالرؤس الثلاث - و - و د يمر أيضا بالرأس المتساوية لها وهي ه وهكذا

فقد ثبت ثم سدا ان المحيط الذي يمر بالنقط الثلاث ا و - و د يمر بجميع رؤس زوايا الشكل المنتظم المفروض وهو المطلوب (وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كانت الاضلاع ا - و - و د الخ اوتارا متساوية تكون ابعادها عن المركز متساوية كما تقرر ذلك في المقالة الثانية فينتهذ اذ ارسم محيط دائرة نصف قطره ط ه ومركزه ط كان ذلك المحيط مماسا للضلع - د في وسطه وفي اواسط سائر اضلاع الشكل المنتظم المفروض

• (تنبيه) •

اعلم ان النقطة ط التي هي المركز المشتركة للدائرة المرسومة داخل الشكل المنتظم وللدائرة المرسومة خارجه يمكن ان تعتبر أيضا مركزا للشكل المذكور وحينئذ يقال للزاوية التي مثل ا ط - أي المنحصرة بين نصفي قطرين واصلين الى نهايتي ضلع واحد مثل ا - زاوية مركزية وحيث ان جميع الاوتار ا - و - د الخ متساوية يعلم من ذلك أن الزوايا المركزية متساوية وحينئذ يتعين مقدار كل من تلك الزوايا بقسمة مجموع الاربع زوايا القائمة على عدد اضلاع الشكل

• (الدعوى الثالثة النظرية) •

• (شكل ٢٣ من اللوحة ١٧) •

كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة اذا كان متساوي الاضلاع كان متساوي الزوايا

وكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة اذا كان متساوي الزوايا كانت اضلاعه متساوية مثني

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية ا معيارها

$$\frac{\text{المحيط} - \text{القوس} ا - \text{القوس} اف}{2} = \text{الزاوية} - \text{معيارها}$$

$$\frac{\text{المحيط} - \text{القوس} ا - \text{القوس} ح}{2} = \text{القوس} - \text{معيارها}$$

اف تكون الزاوية ا مساوية للزاوية ح وبمثل هذا يبرهن على تساوى الزوايا الاخر

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كانت الزاوية ا = ح = د

$$\dots = \text{ف يكون الضلع} اف = \text{ح} = \text{د} = \text{هـ} و ا - \frac{\text{المحيط} - \text{القوس} ا - \text{القوس} اف}{2} = \text{ح} = \text{د} = \text{هـ} \text{ف لان الزاوية ا معيارها}$$

$$\frac{\text{المحيط} - \text{القوس} ا - \text{القوس} ح}{2} = \text{الزاوية} - \text{معيارها}$$

حيث كانت الزاوية ا مساوية للزاوية ح بالفرض يلزم أن يكون

$$\frac{\text{المحيط} - \text{القوس} ا - \text{القوس} اف}{2} = \frac{\text{المحيط} - \text{القوس} ا - \text{القوس} ح}{2}$$

ويلزم من هذا أن يكون القوس اف = للقوس ح وبمثل هذا

يبرهن على ان القوس ا - يساوى القوس ح د وان القوس ح د

يساوى القوس د هـ وهكذا ويلزم من هذا أن تكون الاضلاع متساوية

مثني

(تنبيه)

اعلم ان الضلع الاول = الضلع الثالث و = الخامس و = السابع

ويساوى التاسع وهكذا وان الضلع الثانى = الضلع الرابع ويساوى

السادس و = الثامن وهكذا فاذا كان عدد اضلاع الشكل فرديا بان

كان تسعة مثلا كان الضلع الاول هو الفارق بين الضلع التاسع والضلع

الثاني وكانت جميع اضلاع الشكل متساوية

• (الدعوى الرابعة النظرية) •

• (شكل ٢٤ من اللوحة ١٧) •

كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوي الزوايا كان متساوي
الاضلاع

وكثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوي الاضلاع كانت زواياه
متساوية مشق

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية $\angle A = \angle B = \angle C = \dots$
 $\angle F$ يكون الضلع AB منصفاً في نقطة التماس E لانه لو وصل نصفاً
القطرين CA و CB لكانت الزاوية $\angle AEC = \angle BEC$ للزاوية $\angle AEC$
اقيامهما وحيث ان الزاوية $\angle A = \angle B$ للزاوية $\angle AEC$ بالفرض تكون
الزاوية $\angle AEC = \angle BEC$ للزاوية $\angle AEC$ ويلزم من هذا أن تكون الزاوية
الثالثة $\angle C = \angle A = \angle B$ للزاوية $\angle AEC$ وحيث ان الضلع $AC = BC$
مشارك في المثلثين $\triangle AEC$ و $\triangle BEC$ يكون المثلث $\triangle AEC = \triangle BEC$
للمثلث $\triangle AEC$ كما تقر ذلك في النظرية السابعة من المقالة الاولى ويلزم
من تساوي هذين المثلثين أن يكون الضلع $AE = BE$ مساوياً للضلع EC
وبمثل هذا يبرهن على أن الضلع $AC = BC$ والضلع $AB = AC$
أي يبرهن على أن كل ضلع منصف في نقطة التماس وحيث ان التماس E
 $=$ التماس E يكون $AE = BE$ وبمثل هذا يبرهن على أن
جميع الاضلاع متساوية وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كان الضلع $AB = AC$
 $\angle A = \angle B = \angle C = \dots$ وأيضاً $\angle A = \angle B = \angle C$ ينتج
من ذلك أن الضلع $AC = BC$ وحيث ان الزاوية $\angle AEC = \angle BEC$
اقيامهما والضلع $AC = BC$ لان كلاهما نصف قطر دائرة
بعينها يلزم أن يكون المثلث $\triangle AEC = \triangle BEC$ مساوياً للمثلث $\triangle AEC$ كما تقر

ذلك في النظرية السادسة من المقالة الاولى ويلزم من تساوى هذين المثلثين
أن تكون الزاوية ح ا ب = للزاوية ح ك ب وأن تكون الزاوية ا
التي هي ضعف الزاوية ح ا ب مساوية للزاوية ح التي هي ضعف الزاوية
ح ك ب وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ب = د وهكذا الى آخره
بمعنى أن الزوايا متساوية مثلي

* (تنبيه) *

اعلم أن الزاوية الاولى = الثالثة و = الخامسة و = السابعة
وهكذا وأن الزاوية الثانية = الرابعة و = السادسة و = الثامنة
وهكذا فإذا كان عددا ضلاع الشكل فردا بان كان سبعة مثلا كانت الزاوية
الاولى هي الفارقة بين السابعة والثانية وكانت زوايا الشكل كلها
متساوية

* (الدعوى الخامسة العملية) *

* (شكل ١٥٧ من اللوحة ٦) *

إذا كان المطلوب رسم مربع داخل دائرة معلومة
فطريقة ذلك أن يرسم قطران متعامدان مثل ا ب و د ويوصل
ا ب و ب د و د ح و ح ا فيكون الشكل الحادث ا ب د ح هو المربع
المطلوب

لانه يلزم من تساوى الزوايا المركزية ا ه ب و ب ه ح و ح د ا و د ا ه
أن تكون الاقواس ا ب و ب ح و ح د و د ا متساوية ويلزم
من هذا أن تكون الاوتار ا ب و ب ح و ح د و د ا متساوية
ويلزم من كون كل من الزوايا ا و ب و ب ح و ح د محيطية ومرسومة
في نصف الدائرة أن تكون كل واحدة منها قائمة فقد ثبت بهذا أن الشكل
ا ب د ح مربع وهو المطلوب

* (تنبيه) *

حيث ان المثلث ب ه ح قائم الزاوية ومتساوى الساقين يكون

$$ج : ه :: \sqrt{2} : 1$$

كما نقرر ذلك في النظرية العاشرة من المقالة الثالثة فيعلم من ذلك أن نسبة ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة إلى نصف القطر كنسبة جذر الاثنين للواحد

(مثالان)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثلاث أذرع

فطريقة ذلك أن يضرب مقدار نصف قطر الدائرة في جذر الاثنين فيحصل الضرب يكون المقدار المطلوب ففي هذا المثال يضرب ثلاث أذرع في جذر الاثنين فيحصل المطلوب

(المثال الثاني)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار نصف قطر الدائرة المرسوم داخلها مربع مقدار ضلعه خمس أذرع

فطريقة ذلك أن يقسم مقدار ضلع المربع المعلوم على جذر الاثنين فيخرج القسمة يكون المقدار المطلوب ففي هذا المثال يقسم خمس أذرع على جذر الاثنين فيحصل المطلوب

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ١٥٨ من اللوحة ٦)

إذا كان المطلوب رسم مستقيم منتظم داخل دائرة معلومة

فطريقة ذلك أن يقال لي فرض أن المسئلة محلولة وان $ا - ه$ هو أحد اضلاع المستقيم المنتظم المطلوب فلو وصل نصف القطرين $ا ط$ و $ه ط$ لكان المثلث الحادث $ا ط ه$ متساوي الاضلاع لان الزاوية $ا ط ه =$

أربع قوائم $\frac{4}{6}$ فاذا جعلت الزاوية القائمة وحدة كانت الزاوية $ا ط ه = \frac{4}{6}$

$$\frac{2}{3} =$$

ويلزم من هذا أن يكون مجموع الزاويتين $\alpha + \beta = \gamma$ و $\alpha + \beta = \gamma$ حيث ان الزاوية $\alpha + \beta = \gamma$ تكون الزاوية $\alpha + \beta = \gamma$ والزاوية $\alpha + \beta = \gamma$ فالذن يكون المثلث $\alpha + \beta = \gamma$ متساوي الاضلاع لان زواياه الثلاث متساوية فقد ثبت بهذا ان ضلع المستقيم المنتظم المرسوم داخل الدائرة مساو لنصف القطر ومن هنا تنتج طريقة رسمية هي ان تؤخذ قطعة بالبيكار بقدر نصف القطر ويركز في أى نقطة من المحيط ويوضع الطرف الثانى من البيكار على المحيط فينقل من المحيط سدسه ثم ينقل البيكار لينقل السدس الثانى من المحيط وهكذا حتى يرجع الى نقطة الابتداء ثم يوصل أو تارة تلك الأقواس فيحدث المستقيم المنتظم المطلوب

(تنبيهان) *

الاول اذا وصات خطوط مستقيمة بين كل رأسين من رؤس زوايا المستقيم المنتظم ا-د-هـ و يكون المثلث الحاد ا-د-هـ متساوي الاضلاع الثانى حيث كان ا-ب-ج = د-هـ-ز = ح-ط = ا-ط يكون الشكل ا-ب-ج-د-هـ-ز المتوازى الاضلاع معيناً وقد تقرّر في نتيجة النظرية الرابعة عشر من المقالة الثالثة أن مجموع مربعات الاضلاع الاربعة من أى شكل متوازى الاضلاع مساو مجموع مربعي قطريه فاذن يكون

$$ا^2 + د^2 + هـ^2 + ز^2 = ا^2 + د^2 + ح^2 + ط^2 = ا^2 + د^2 + ح^2 + ط^2 + ا^2 + د^2 + هـ^2 + ز^2$$

فاذا طرح من كل من هاتين المتساويتين $ا^2 + د^2$ يكون

$$ا^2 + د^2 = ٣ ح^2 + ٣ ط^2$$

$$ا^2 : د^2 :: ح^2 : ط^2$$

$$ا : د :: ح : ط$$

أعني أن نسبة ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الى

نصف القطر كنسبة جذر الثلاثة للواحد

* (مثالان) *

* (المثال الاول) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثلاث أذرع

فطريقة ذلك أن يضرب نصف القطر في جذر الثلاثة فحاصل الضرب يكون هو المقدار المطلوب ففي هذا المثال تضرب ثلاث أذرع في جذر الثلاثة فيحصل المطلوب

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار نصف قطر الدائرة المرسوم داخلها مثلث متساوي الاضلاع مقدار ضلعه خمس أذرع

فطريقة ذلك أن يقسم مقدار الضلع المعلوم على جذر الثلاثة فنخرج القسمة يكون المقدار المطلوب ففي هذا المثال نقسم خمس أذرع على جذر الثلاثة فيحصل المطلوب

* (الدعوى السابعة العملية) *

* (شكل ١٥٩ من اللوحة ٦) *

إذا كان المطلوب رسم معشر منتظم داخل دائرة معلومة

فطريقة ذلك أن يقال لي فرض أن المسئلة محلولة وأن $ا ب$ هو أحد

اضلاع المعشر المنتظم المطلوب فلو وصل نصف القطرين $ا ع$ و $ع ب$

لكان المثلث الحادث $ا ع ب$ متساوي الساقين ويلزم من هذا أن تكون

الزاوية $ع ا ب$ مساوية للزاوية $ع ب ا$ وحيث فرض أن $ا ب$ هو

أحد اضلاع المعشر المنتظم المطلوب يكون القوس $ا ب$ عشر المحيط وتكون

الزاوية $ا ع ب$ عشر الأربع قوائم أو خمس القائمتين ويلزم من هذا أن يكون

مجموع زوايا المثلث $ا ع ب$ قدر الزاوية $ا ع ب$ خمس مرات ويلزم من

هذا أن تكون الزاوية $ع ا ب$ ضعف الزاوية $ع ب ا$ والزاوية $ع ب ا$

ضعف الزاوية ع فلو نصفت الزاوية ع - ا بمستقيم مثل سم لحدث
 ام : م ع :: ا - ب : ع - ا أو :: ا - ب : ا ع

كما تقرر ذلك في النظرية السابعة عشر من المقالة الثالثة

وحيث ان الزاوية م - ع نصف الزاوية ا - ع تكون الزاوية م - ع
 مساوية للزاوية ع ويكون الضلع م ع مساويا للضلع م - ع
 فلو وضع م - ب بدل م ع في التناسبة السابقة لصارت هكذا

ام : م - ب :: ا - ب : ا ع

ويلزم من كون المثلث م - ع - متساوي الساقين أن تكون الزاوية الخارجة
 منه وهي ام - ب ضعف الزاوية ع وحيث ان الزاوية م - ا - ب ضعف
 الزاوية ع كذلك تكون الزاوية ام - ب مساوية للزاوية م - ا - ب ويلزم
 من هذا أن يكون المثلث ام - ب متساوي الساقين أي أن يكون م - ب
 = ا - ب فلو وضع ا - ب بدل مساوية م - ب في التناسبة السابقة
 لصارت هكذا

ام : ا - ب :: ا - ب : ا ع

فيعلم من هذه التناسبة أن ضلع المعشر المنتظم المطلوب وسطا متناسبا بين
 نصف القطر والجزء الاصغر ام ومن هنا تنتج طريقة رسمية هي
 أن يقسم نصف القطر ا ع الى قسمين ام و م ع بحيث يكون
 القسم الاكبر وهو م ع وسطا متناسبا بين نصف القطر ا ع وجزئه
 الاصغر ام ثم تؤخذ قنطرة بالبيكار بقدر القسم الاكبر المذکور ويركز
 في أي نقطة من محيط الدائرة ويوضع الطرف الثاني من البيكار في نقطة أخرى
 من المحيط وينقل البيكار مرة ثانية وثالثة وهكذا حتى يرجع الى نقطة
 الابتداء فينقسم المحيط الى عشرة اقواس متساوية ثم يوصل أوتار تلك
 الاقواس فيتشكل المعشر المنتظم المطلوب

• (النتيجة الاولى) •

إذا كان المطلوب رسم مخمس منتظم داخل الدائرة

فطريقة ذلك أن يقسم المحيط الى عشرة أقواس متساوية ثم توصل اوتار
الاقواس التي كل قوس منها يساوى ضعف عشر المحيط فيتشكل الخمس
المنتظم المطلوب

• (النتيجة الثانية) •

اذا كان المطلوب رسم الخمس عشرى المنتظم داخل الدائرة
فطريقة ذلك أن يطرح قوس يساوى عشر المحيط من قوس يساوى سدسه
فيبقى قوس يساوى جزءاً من خمسة عشر من المحيط ثم تؤخذ قطعة بالبيكار
بقدر هذا الجزء وتوضع على المحيط مرة بعد أخرى حتى يرجع الى نقطة
الابتداء فيتشكل الخمس عشرى المنتظم المطلوب

$$\text{لان } \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} = \frac{2}{24} = \frac{4}{48} = \frac{7}{72} = \frac{1}{10}$$

• (تنبيه) •

اذا رسم مضلع داخل الدائرة ونصفت الاقواس المقابلة لاضلاعه ووصلت
اوتار أنصاف هذه الاقواس يتشكل مضلع عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع
الاول فان كان المضاع الاول منتظماً كان المضاع الحادث كذلك فلذا
يستعمل المربع لانشاء المضاعفات المنتظمة التي يكون عدد اضلاعها مضاعفاً

للعدد ٢ مثل ٨ و ١٦ و ٣٢ و ٦٤ و ١٢٨ الخ

ويستعمل المستدس المنتظم لانشاء المضاعفات المنتظمة التي يكون عدد

اضلاعها مضاعفاً لكل من العددين ٦ و ٢ مثل ١٢ و ٢٤

و ٤٨ و ٩٦ و ١٩٢ الخ

ويستعمل المعشر لانشاء المضاعفات التي يكون عدد اضلاعها مضاعفاً لكل

من العددين ١٠ و ٢ مثل ٢٠ و ٤٠ و ٨٠ و ١٦٠

و ٣٢٠ الخ

ويستعمل الخمس عشرى لانشاء المضاعفات التي يكون عدد اضلاعها

مضاعفاً لكل من العددين ١٥ و ٢ مثل ٣٠ و ٦٠ و ١٢٠

و ٢٤٠ و ٤٨٠ الخ

وطالما اعتقد المتمدنون أن هذه المضلعات المنتظمة هي التي يمكن رسمها داخل الدائرة بواسطة طرق الهندسة الأصلية أو بها بواسطة حل المعادلات الجبرية ذوات الدرجة الأولى والثانية إلى أن ظهر المعلم غوس المتساوي وبرهن في كتابه الذي طبع في ناحية ساقدونيا سنة ألف وثمانمائة وواحدة من تاريخ الميلاد أنه يمكن بواسطة طرق مشابهة للطرق التي ذكرت أن يرسم داخل الدائرة مضلع منتظم عدد اضلاعه سبعة عشر ضلعا بل يمكن أيضا أن يرسم أى مضلع منتظم عدد اضلاعه $2^n + 1$ بشرط أن يكون $2^n + 1$ عددا أوليا

(الدعوى الثامنة العملية)

(شكل ١٦٠ من اللوحة ٦)

إذا علم مضلع منتظم مرسوم داخل دائرة وكان المطلوب أن يرسم على هذه الدائرة مضلع مشابه له

فطريقة ذلك أن تنصف الاقواس $ا ب$ و $ب ج$ و $ج د$ الخ بنقط مثل $م$ و $ن$ و $هـ$ الخ ثم يمتد من تلك النقط خطوط مستقيمة مماسة لمحيط الدائرة مثل $ر ح$ و $ح ط$ و $ط ع$ الخ فيحدث من تلاقى هذه الخطوط مضلع منتظم مشابه للمضلع المعلوم $ا ب ج د هـ$ وتكون كل ثلاث نقط مثل $ق$ و $س$ و $ح$ على مستقيمة واحدة لانه حيث كانت اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة موازية لنظائرها من المضلع المرسوم داخل الدائرة تكون كل زاوية من زوايا المضلع الخارج مساوية لنظيرتها من المضلع الداخل وحيث كانت زوايا المضلع الداخل متساوية تكون زوايا المضلع الخارج كذلك وقد تقررت في النظرية الرابعة أن كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوي الزوايا كان متساوي الاضلاع فقد ثبت بهذا أن المضلع $س ر ح ط ع$ الخ منتظم وهو المطلوب

(النتيجة الاولى)

إذا علم مضلع منتظم مرسوم على دائرة وكان المطلوب أن يرسم داخل هذه

الدائرة مضاع منتظم مشابه له

فطريقة ذلك أن يوصل من المركز الى رؤس زوايا الشكل المعلوم خطوط مستقيمة مثل $و د و ح و ع$ الخ فهذه الخطوط تقطع محيط الدائرة في نقط مثل $ا و ب و ج$ الخ فاذا وصلت الاوتار $ا ب و ب ج و ج د$ الخ حدث مضلع داخل الدائرة مشابه للمضلع المعلوم المرسوم خارجها

أو توصل أوتارين نقط تماس المحيط باضلاع المضاع الخارج فيحدث أيضا مضلع داخل الدائرة مشابه للمضلع المعلوم المرسوم خارجها
* (النتيجة الثانية) *

يمكن أن يرسم على الدائرة جميع الاشكال المنتظمة التي علمت كيفية رسمها في هذه الدائرة وبالعكس

* (الدعوى التاسعة النظرية) *

• (شكل ١٦٠ من اللوحة ٦) •

كل مضاع منتظم مساحته تساوى حاصل ضرب محيطه في ربع قطر الدائرة المرسومة داخله

(برهانها) أن يقال ليكن $ر ح ط$ الخ مضلعاً منتظماً مساحته المثلث $ر ح ط$ تساوى $ر ح \times \frac{1}{2} ط$ ومساحة المثلث $ح ط د$ تساوى $ط ح \times \frac{1}{2} ح د$ وحيث أن $و د = ط د$ تكون مساحة مجموع المثلثين هكذا

($ر ح ط + ح ط د$) $\times \frac{1}{2} ط د$ فاذا أخذت مساحة جميع المثلثات المشتمل عليها المضلع يشاهد أن مساحة المضلع المذكور تساوى حاصل ضرب محيطه في $\frac{1}{2} ط د$ أى في ربع القطر وهو المطلوب

* (تنبيه) *

اعلم أن الخط $و د$ الذى هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع هو عين العمود المنزل من المركز على أحد أضلاعه

* (الدعوى العاشرة النظرية) *

* (شكل ١٦١ من اللوحة ٦) *

نسبة محيطات المضامع المنتظمة المتحدة في عدد الاضلاع الى بعضها كنسبة أنصاف أقطار الدوائر المرسومة داخلها وكنسبة أنصاف أقطار الدوائر المرسومة خارجها ونسبة سطوح المضامع المذكورة الى بعضها كنسبة مربعات أنصاف الاقطار المذكورة

(برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن ab أحد أضلاع مضلع منتظم مركزه $هـ$ فيكون $اهـ$ هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ويكون العمود $هـد$ المنزل على ab هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله وليكن أيضا $رج$ أحد أضلاع المضلع المنتظم الآخر والنقطة $ط$ مركزه فيكون $طر$ هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ويكون العمود $طع$ المنزل على $رج$ هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فثبت ان الزاوية $ا$ نصف زاوية المضلع الاول والزاوية $ر$ نصف زاوية المضلع الثاني تكون الزاوية $ا$ مساوية للزاوية $ر$ وأيضا تكون الزاوية $س$ مساوية للزاوية $ح$ ويلزم من هذا أن يكون المثلث $اهـ$ مشابها للمثلث $رجط$ وكذا يلزم أن يكون المثلث $اهـ$ مشابها للمثلث $رجط$ ويلزم من هذا أن يكون

$$ab : رج :: اهـ : رط :: دهـ : طع$$

وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث ان

$$ab : رج :: اهـ : رط :: دهـ : طع$$

وان المقادير المتناسبة مربعاتها متناسبة كما تقر في علم الحساب فيكون

$$ab^2 : رج^2 :: اهـ^2 : رط^2 :: دهـ^2 : طع^2$$

وحيث ان نسبة المضامين المذكورين الى بعضهما كنسبة مربعي ضلعيين متناظرين يكون

المضلع

المنابع الاول : المضلع الثاني :: $\overline{ا} : \overline{ب} :: \overline{ج} : \overline{د} :: \overline{هـ} : \overline{و}$
وهو المطلوب

(الدعوى الحادية عشر الفائدة)

(شكل ١٦٢ الثاني)

الخط الممّذب المحيط أصغر من كل خط محيط به

ونعني بالخط الممّذب الخط المنحني أو المنكسر أو المركب منهما الذي لا يقطعه
الاستقيم الا في نقطتين

(برهانها) أن يقال ليكن $ا-ب-ج-د$ خطا منكسرا محيطا بـ $هـ-و-ز$ خطا
آخر محيطا بالخط الممّذب $ا-ب-ج-د$ فلو مدت الاضلاع $ا-ب$ و $ب-ج$ و $ج-د$
و $د-ا$ في جهة واحدة حتى قطعت الخط المحيط لحدثت هذه المتباينات

$$ا-ب + ب-ج + ج-د + د-ا > ا-ب + ب-ج + ج-د + د-ا$$

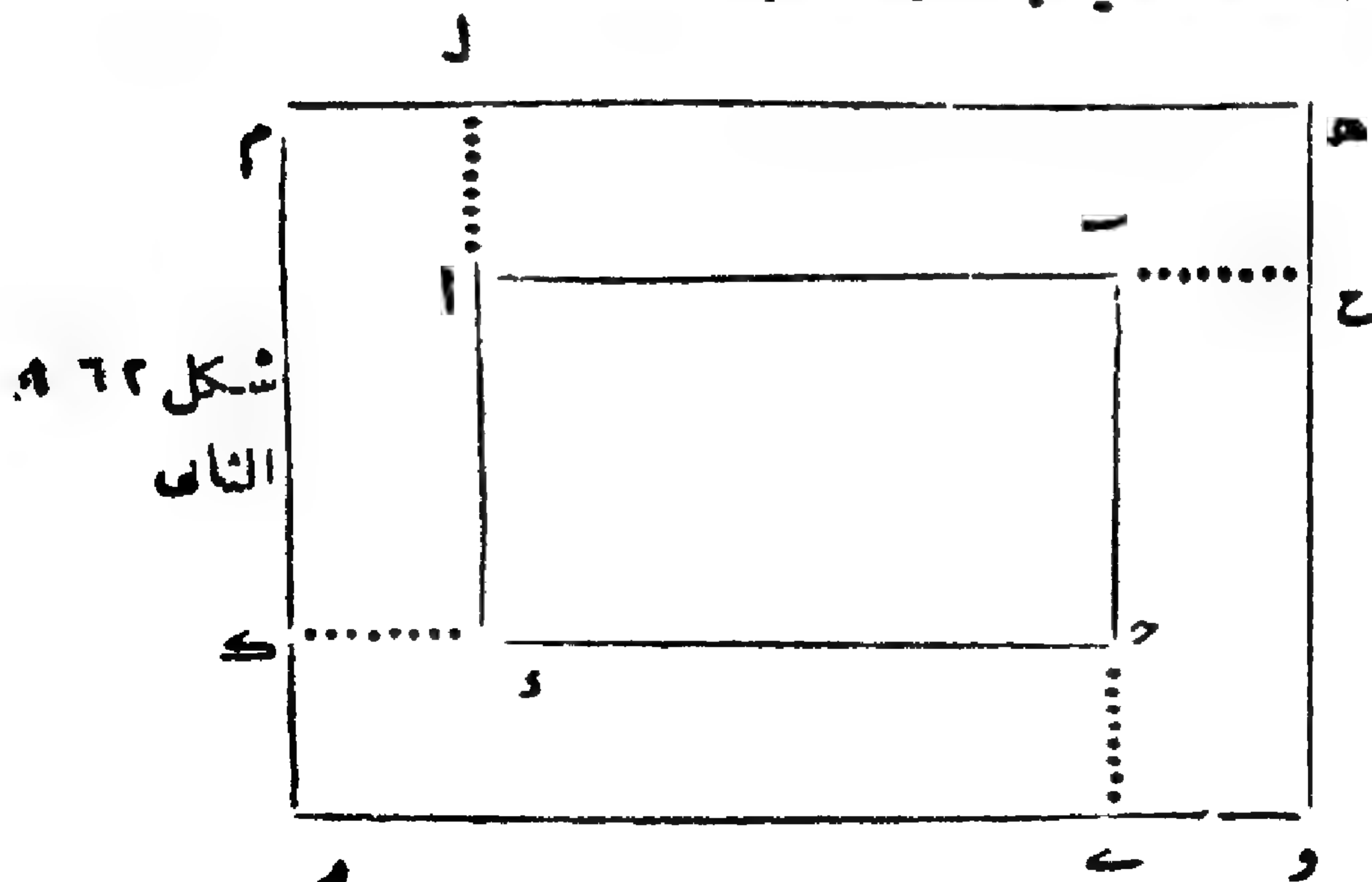
$$ب-ج + ج-د + د-ا + ا-ب > ب-ج + ج-د + د-ا + ا-ب$$

$$ج-د + د-ا + ا-ب + ب-ج > ج-د + د-ا + ا-ب + ب-ج$$

$$د-ا + ا-ب + ب-ج + ج-د > د-ا + ا-ب + ب-ج + ج-د$$

فلوجعت هذه المتباينات طرفا لطرف وحذفت الاجزاء المشتركة من كل من
الطرفين لحدث

$ا-ب + ب-ج + ج-د + د-ا > ا-ب + ب-ج + ج-د + د-ا$
وبمثل هذا يبرهن على أن كل خط ممّذب كائنا ما كان عدداً لأضلاعه فهو دائماً
أصغر من أي خط محيط به وهو المطلوب



• (الدعوى الثانية عشر النظرية) •

(شكل ١٦٤ من اللوحة ٧) •

كل دائرتين متحدتي المركز يمكن دائماً أن يرسم داخل كبراهما مضلع منتظم أضلاعه لا تقطع محيط الصغرى وأن يرسم على محيط الصغرى مضلع منتظم أضلاعه لا تقطع محيط الكبرى

(برهان القضية الأولى) أن يقال ليكن Γ نصف قطر الدائرة الصغرى و Δ نصف قطر الكبرى فلورسم مستقيم مثل $\Delta\epsilon$ مماس لمحيط الصغرى في النقطة ϵ ومد على استقامته حتى انتهى إلى محيط الكبرى في نقطة ζ مثل $\Delta\epsilon\zeta$ ورسم داخل الدائرة الكبرى مضلع منتظم من المضامع المنتظمة الممكن رسمها داخل الدائرة بواسطة العمليات المتقدمة ونصفت الأقواس الموترة بأضلاعه ووصلت أوتاراً أنصاف هذه الأقواس لتشكيل مضلع منتظم عدد أضلاعه ضعف عدد أضلاع الأول فلودووم على تنصيف هذه الأقواس لتحصل قوس مثل $\Gamma\delta$ أصغر من القوس $\Delta\epsilon$ فلوفرش أن النقطة δ هي وسط القوس $\Gamma\delta$ لظهر أن الوتر $\Gamma\delta$ أبعد من المركز عن الوتر $\Delta\epsilon$ وأن المضلع المنتظم الذي أحد أضلاعه $\Gamma\delta$ لا يقطع محيط الدائرة التي نصف قطرها $\Gamma\alpha$ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لروصل $\Gamma\delta$ و $\Delta\epsilon$ اللذان يقطعان المماس $\Delta\epsilon$ في δ و ϵ ليكن κ هو أحد أضلاع المضلع المنتظم المرسوم على الدائرة الصغرى المشابه للمضلع المرسوم داخل الدائرة الكبرى الذي ضلعه $\Gamma\delta$

وحيث أن الخط $\Gamma\delta$ أصغر من الخط $\Gamma\epsilon$ يظهر أن المضلع المرسوم على الدائرة الصغرى الذي ضلعه κ لا يقطع محيط الدائرة الكبرى فيعلم من ذلك أنه يمكن بواسطة العمل المتقدم أن يرسم مضلع منتظم داخل الدائرة الكبرى وأن يرسم مضلع مشابه له على محيط الدائرة الصغرى بحيث تكون أضلاعهما محصورة بين محيطي الدائرتين

• (تنبيه) •

* (تنبيه) *

يمكن أن يرسم جزء من مضلع منتظم داخل أكبر القطعين و د ر و ط ح
وأن يرسم جزء آخر مشابه له على القطع الاصغر بحيث تكون اطراف المضلعين
محصورة بين المحيطين ويكون العمل ذلك أن يقسم القوس و د ر الى قسمين
متساويين ثم إلى أربعة أقسام متساوية ثم إلى ثمانية أقسام متساوية وهكذا
حتى يحصل جزء أصغر من القوس د ر ه

ويطلق قسم المضلع المنتظم هناء على الشكل المحدود بجملة أوتار متساوية
مرسومة في القوس و د ر من أحد طرفيه إلى الآخر وهذا القسم وان
وجدت فيه خواص المضلع المنتظم وهي تساوي الاضلاع والزوايا وامكان
رسمه في الدائرة ورسم الدائرة فيه الا انه لا يكون جزءاً من مضلع منتظم الا اذا
كان القوس الموتر باحد اضلاعه جزءاً متداخلاً في المحيط أعني الا اذا اشتمل
محيط الدائرة على قوسه مراراً صحيحة بدون باق

* (الدعوى الثالثة عشر النظرية) *

نسبة محيطي الدائرتين إلى بعضهما كنسبة نصفي قطريهما
ونسبة الدائرتين إلى بعضهما كنسبة مربعي نصفي قطريهما
(برهانها) أن يقال لو رسم في الدائرتين مضلعان منتظمان متشابهان لازم
أن تكون نسبة محيطي هذين المضلعين إلى بعضهما كنسبة نصفي قطري
الدائرتين المرسومين على المضلعين المذكورين وأن تكون نسبة سطحي هذين
المضلعين إلى بعضهما كنسبة مربعي نصفي القطرين المذكورين كما تقرر ذلك
في النظرية العاشرة وحيث انه يمكن اعتبار الدائرة مضلعاً منتظماً لا حصر
لعدد أضلاعه ينتج من ذلك أن نسبة محيطي الدائرتين إلى بعضهما كنسبة
نصفي قطريهما وأن نسبة الدائرتين إلى بعضهما كنسبة مربعي نصفي
قطريهما وهو المطلوب

* (تعريف) *

الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطوع المتشابهة هي التي تقابل

الزوايا المركزية المتساوية

* (الدعوى الرابعة عشر النظرية) *

* (شكل ١٦٦ من اللوحة ٧) *

نسبة القوسين المتشابهين الى بعضهما كنسبة نصفي قطريهما
ونسبة القطعين المتشابهين الى بعضهما كنسبة مربعي نصفي قطريهما
(برهان القضية الاولى) أن يقال لتكن الزاوية \angle مساوية للزاوية \angle
فيكون

القوس سا : المحيط اح :: الزاوية \angle : \angle قوائم
وكذا يكون

القوس ده : المحيط طد :: الزاوية \angle : \angle قوائم
ويلزم من هذا أن يكون

القوس سا : القوس ده :: المحيط اح : المحيط طد
وحيث ان المحيط اح : المحيط طد :: \angle : \angle يكون
القوس سا : القوس ده :: \angle : \angle وهو المطلوب
(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث ان

القطع اح : الدائرة اح :: الزاوية \angle : \angle قوائم و
القطع طه : الدائرة طد :: الزاوية \angle : \angle قوائم يكون
القطع اح : القطع طه :: الدائرة اح : الدائرة طد

وحيث ان الدائرة اح : الدائرة طد :: \angle : \angle يكون
القطع اح : القطع طه :: \angle : \angle وهو المطلوب

* (الدعوى الخامسة عشر النظرية) *

كل دائرة مساحتها تساوي حاصل ضرب محيطها في ربع قطرها
(برهانها) أن يقال لو رسم على الدائرة مضلع منتظم لكانت مساحته مساوية
لحاصل ضرب محيطه في ربع قطرها الدائرة المرسومة داخله كما تقرر ذلك في

النظرية التاسعة فاذا كانت اضلاع هذا المضاع صغيرة جدا يتحدد محيطه بمحيط الدائرة وحيث تكون مساحة الدائرة مساوية لمساحتها أى لحاصل ضرب محيطها في ربع قطرها وهو المطلوب

(النتيجة الاولى)

• *(شكل ١٦٨ من اللوحة ٧)*

كل قطع دائرة مساحته تساوى حاصل ضرب قوسه في ربع قطره لان نسبة القطع ا - ب الى الدائرة الكاملة كنسبة القوس ا م - الى المحيط الكامل ا - د كما تقر ذلك في المقالة الثانية أو كنسبة القوس ا م - الى المحيط ا - ب الى المحيط ا - د $\times \frac{1}{4}$ \times ا حيث ان مساحة الدائرة = المحيط ا - د $\times \frac{1}{4}$ \times ا ينتج ان مساحة القطع ا - ب = ا م - $\times \frac{1}{4}$ \times ا وهو المطلوب

(النتيجة الثانية)

اذا رمز بالرمز م و م لمحيطي دائرتين مرموزا قطراً أحدهما بالرمز ن واقطراً الآخر بالرمز ن حدث

$$م : م :: ن : ن \text{ أو}$$

$$م : ن :: م : ن$$

أعني أن النسبة بين أى محيط دائرة وقطرها واحدة في سائر الدوائر والعبادة أن يرمز بالحرف ط لمحيط الدائرة التى قطرها واحد فعلى هذا يكون

$$م : ن :: ط : ط \text{ ومن هذه المناسبة ينتج أن}$$

$$م = ط \times ن = ط \times ٢ \text{ نق } ٢ ط \text{ نق}$$

(ونق ٢ من لنصف القطر)

وحيث ان كل دائرة مساحتها تساوى حاصل ضرب محيطها في ربع قطرها

نتج من ذلك أن الدائرة التي نصف قطرها نق

$$\text{مساحتها} = ٢ ط نق \times \frac{١}{٢} نق = ط نق$$

• (تنبيه) •

اعلم أن مسألة إيجاد خط مستقيم يساوي محيط دائرة معلومة تؤل إلى إيجاد مقدار النسبة المرو وزاها بالحرف ط أي إلى إيجاد طول محيط الدائرة التي قطرها واحد

وكذلك مسألة إيجاد مربع مكافئ لدائرة معلومة تؤل إلى إيجاد مربع يكافئ مستطيلاً قاعدته تساوي محيط الدائرة المعلومة وارتفاعه يساوي ربع قطرها

والى الآن لم يمكن إيجاد النسبة الحقيقية بين محيط الدائرة وقطرها وإنما الذى أمكن إيجاد نسبة تقريبية فقط ولكن بواسطة الكسور المتسلسلة وحساب المتواليات صارت تلك النسبة فى أقصى درجة من التقريب بحيث لو وجدت النسبة الحقيقية فلاثرة فيها زيادة عما ذكر

وقبل أن يعلم حساب المتواليات على وجه الاتقان كان المهندسون المتقدمون يذولون الوسع ما استطاعوا فى حل هذه المسئلة وأما الآن فقد صارت فى حيز الإهمال لـ كن لاجل تمرين المبتدئين وتوسيع مبادىء افكارهم اجتهد من المهندسين المتقدمين مهندس يسمى ارشميدس وبين

أن النسبة بين محيط الدائرة وقطرها محصورة بين $\frac{١}{٧} \div ٣$ و $\frac{١}{٧} \div ٣$ أو بين $\frac{٧١}{٤٩٧} \div ٣$ و $\frac{٧٠}{٤٩٧} \div ٣$ فعلى هذا يكون $\frac{١}{٧} \div ٣$ و $\frac{١}{٧} \div ٣$

أو $\frac{٢٢}{٧}$ مقداراً مقرباً من النسبة المذكورة زائداً عنها بأقل من $\frac{١}{٤٩٧}$ ولكونه أسهل من غيره كان هو المختار فى الاستعمال ومن المتقدمين مهندس يسمى ميتيوس استخرج مقدار هذه النسبة أشد قرباً مما ذكر وهو $\frac{٣٥٥}{١١٣}$

وبالجمله فقد استخرج بعرفة المتأخرين من المهندسين مقدار ط بواسطة الكسور العشارية وقد موها إلى درجة التقريب ما استطاعوا حتى وصلوا إلى هذه الأعداد

١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٤٢. وقد صواب هذا الكسر الى
الخانة المائة والعشرين بل الى الخانة المائة والاربعين وهذه الكسور التي
تقدمت الى هذه الدرجة حصل بها التقريب الكافي كما لا يخفى وكم
ما يجري العمل في الحسابات باعتبار $ط = ١٤١٥٩٢٦$ و ٣ وهذا
المقدار أقل من النسبة الحقيقية بأقل من جزء من عشرة ملايين فينتج من هذا
ان هذا المقدار $\frac{٢}{٧}$ يزيد عن النسبة الحقيقية بأقل من $\frac{١}{٧٩٠}$

• (الدعوى السادسة عشر العمالية) •

• (شكل ١٦٩ من الالوحة ٧) •

اذا علم ضلعان منتظمان متشابهان أحدهما مرسوم داخل دائرة والآخر
مرسوم عليهما وكان المطلوب إيجاد سطح المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة
الذي عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الشكل الداخل المعلوم ثم إيجاد
سطح المضلع المنتظم المرسوم على الدائرة الذي عدد اضلاعه ضعف عدد
اضلاع الشكل الخارج المعلوم فطريقة ذلك أن يقال

ليكن $ا$ - أحد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة و $هـ$ و
الموازي له هو أحد اضلاع المضلع المنتظم المشابه له المرسوم على الدائرة ولتكن
النقطة $ح$ هي مركز تلك الدائرة فلو وصل الوتر $ام$ ورسم المماسات $ال$
و $ك$ لكان الوتر $ام$ هو أحد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم داخل
الدائرة الذي عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع المضلع المعلوم المرسوم داخل
الدائرة وحينئذ فالخط $ل ك$ الذي هو ضعف الخط $ل م$ يكون هو أحد
اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة المشابه للمضلع الداخل الذي ضاعه $ام$
اذا تقرّر ذلك يعلم انه يمكن اجراء العمل كما ذكر في الزاوية $ا ح م$ على سائر
الزوايا الاخرى التي تساويها

فاذا رسم بالحرف $ا$ لمساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة الذي ضاعه $ا$ -
وبالحرف $ب$ - مساحة المضلع المشابه له المرسوم على الدائرة

وبالحرف $آ$ - مساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة الذي ضاعه $ام$

وبالحرف $\bar{\gamma}$ مساحة المضلع المشابه المرسوم على الدائرة الذي ضاعه لك
فلايجاد مقدارى $\bar{\alpha}$ و $\bar{\gamma}$ يقال
اولا حيث ان للمثلثين α و α م رأسا مشتركة فى α وارتفاعا
واحد ا يكون

$$\alpha : \alpha :: \gamma : \gamma \text{ وأيضا}$$

$$\alpha : \alpha :: \text{الشكل } \alpha : \text{الشكل } \bar{\alpha} \text{ فينتج أن}$$

$$\alpha : \bar{\alpha} :: \gamma : \gamma$$

وأیضا حيث ان للمثلثين α و α م رأسا مشتركة فى γ وارتفاعا
واحد ا يكون

$$\alpha : \alpha :: \gamma : \gamma$$

وأیضا $\alpha : \alpha :: \text{الشكل } \bar{\alpha} : \text{الشكل } \gamma$ فينتج أن

$$\alpha : \gamma :: \gamma : \gamma$$

ويلزم من كون الخط α موازيا للخط γ أن يكون

$$\alpha : \gamma :: \gamma : \gamma$$

وحيث ان $\gamma : \gamma :: \alpha : \alpha$ يكون

$$\alpha : \gamma :: \gamma : \gamma$$

$$\bar{\alpha} = \gamma \times \gamma$$

أعنى ان مساحة الشكل $\bar{\alpha}$ وسط متناسب بين مساحتي الشكلين المعلومين
وهو المطلوب

وثانيا لايجاد مقدار $\bar{\gamma}$ يقال حيث ان للمثلثين γ و γ رأسا

مشتركة

مشتركة في γ وارتفاعا مشتركا يكون

$$\text{حلم} : \text{حله} :: \text{لم} : \text{له}$$

ويلزم من كون الخط له منصفاً للزاوية هـ ح م أن يكون

$$\text{لم} : \text{له} :: \text{ح م} : \text{ح هـ}$$

المقالة الثالثة وحيث أن $\text{ح م} = \text{ح ا}$ يكون

$$\text{ح م} : \text{ح هـ} :: \text{ح ا} : \text{ح هـ}$$

ويلزم من كون الخط ا د موازياً للخط هـ م أن يكون

$$\text{ح ا} : \text{ح هـ} :: \text{ح د} : \text{ح م}$$

$$\text{ح د} : \text{ح م} :: \text{ا} : \text{آ}$$

$$\text{حلم} : \text{حله} :: \text{ا} : \text{آ}$$

$$\text{حلم} : \text{حلم} + \text{حله} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ}$$

$$\text{وحيث أن حلم} + \text{حله} = \text{هـ م}$$

$$\text{حلم} : \text{هـ م} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ}$$

$$\text{حلم} : \text{هـ م} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ}$$

$$\text{وحيث أن حلم} = \text{ح ل ك}$$

$$\text{ح ل ك} : \text{هـ م} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ}$$

$$\text{وحيث أن ح ل ك} : \text{هـ م} :: \text{الشكل} : \text{الشكل} - \text{يكون}$$

$$\text{ح ل ك} : \text{هـ م} :: \text{ا} : \text{ا} + \text{آ}$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$\frac{\text{ح ل ك}}{\text{ح ل ك} + \text{ح ل م}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا} + \text{آ}}$$

$$\frac{\text{ح ل ك}}{\text{ح ل ك} + \text{ح ل م}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا} + \text{آ}}$$

• (الدعوى السابعة عشر العملية) •

إذا كان المطلوب إيجاد نسبة تقريبية بين محيط الدائرة وقطرها
 بطريقة ذلك أن يقال لو فرض أن نصف قطرها = ١ لكان ضلع المربع
 المرسوم داخلها = $\sqrt{2}$ كما تقر ذلك في تنبيه الدعوى الخامسة العملية
 وحيث أن ضلع المربع المرسوم على الدائرة مساو لقطرها يكون ضلع المربع
 المذكور مساوياً للعدد ٢ ويلزم من هذا أن تكون مساحة المربع المرسوم
 داخل الدائرة مساوية للعدد ٢ ومساحة المربع المرسوم عليها = ٤
 فإذا رمز بالحرف ١ لمساحة المربع المرسوم داخل الدائرة وبالحرف ٢
 لمساحة المربع المرسوم عليها يكون ١ = ٢ و ٢ = ٤
 ويعتضى ما ذكر في الدعوى العملية المتقدمة تكون مساحة المثلث المنتظم

المرسوم داخل الدائرة المرموز له بالحرف ١ هكذا

$$١ = \sqrt{2} \times ١ = \sqrt{2} \times ٢ = ٢ \sqrt{2} = ٢٨٢٨٤٢٧١$$

وتكون مساحة المثلث المنتظم المرسوم على الدائرة المرموز له بالحرف ٢
 هكذا

$$٢ = \frac{١ \times ٢}{٢} = \frac{٢ \times ٢}{٢} = ٢$$

وحيث علمت مساحة المثلث المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومساحة المثلث
 المنتظم المرسوم على الدائرة توجد بواسطتهما مساحة السداس عشرى
 المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومساحة السداس عشرى المنتظم المرسوم
 على الدائرة ويلزم لذلك أن يفرض جديداً أن

$$١ = ٢٨٢٨٤٢٧١ \text{ و } ٢ = ٣١٣٧٠٨٥$$

$$\text{فيخرج أن } ١ = \sqrt{2} \times ١ = ٢٠٦١٤٦٧٤$$

$$\text{و } ٢ = \frac{٢ \times ٢}{١ + ١} = ١٨٢٤٩٧٩$$

وحيث

وحيث علمت مساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم داخل الدائرة
ومساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم على الدائرة توجد بواسطتهما
مساحة المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ٣٢ فاذا دووم على اجراء
العمل بهذه الكيفية توجد مساحة المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ٦٤
ثم مساحة المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ١٢٨ ثم مساحة المضلع
المنتظم الذى عدد اضلاعه ٢٥٦ وهكذا حتى لا يبقى الا فرق يسير جدا
بين مساحة الشكل المرسوم داخل الدائرة ومساحة الشكل المرسوم
خارجها

وحيث ان الدائرة محصورة بين الشككين والفرق بين مساحة هذين الشككين
يسير جدا لا يساوى جزأ من عشرة ملايين يعلم من ذلك انه يمكن أن تعتبر
مساحة احدهما هذين الشككين مساوية لمساحة الدائرة وأن مساحة الدائرة
تساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها

وقد رقت الخانات المتوافقة فى جدول هالك صوره

عدد الاضلاع	مساحة المصراع الداخل	مساحة المضلع الخارج
٤	٢٠٠٠٠٠٠٠٠	٤٠٠٠٠٠٠٠٠
٨	٢٨٢٨٤٢٧١	٢٢١٣٧٠٨٥
١٦	٢٠٦١٤٦٧٢	٢١٨٢٥٩٧٩
٣٢	٢١٢١٤٤٥١	٢١٥١٧٢٤٩
٦٤	٢١٤٦٥٤٨٥	٢١٤٤١١٨٤
١٢٨	٢١٤٠٣٣١١	٢١٤٢٢٢٣٦
٢٥٦	٢١٤١٢٧٧٢	٢١٤١٧٥٠٤
٥١٢	٢١٤١٥١٣٨	٢١٤١٦٣٢١
١٠٢٤	٢١٤١٥٧٢٩	٢١٤١٦٠٢٥
٢٠٤٨	٢١٤١٥٨٧٧	٢١٤١٥٩٥١
٤٠٩٦	٢١٤١٥٩١٤	٢١٤١٥٩٣٣
٨١٩٢	٢١٤١٥٩٢٣	٢١٤١٥٩٢٨
١٦٣٨٤	٢١٤١٥٩٢٥	٢١٤١٥٩٢٧
٣٢٧٦٨	٢١٤١٥٩٢٦	٢١٤١٥٩٢٦

فبعلم من ذلك أن سطح الدائرة = ٢١٤١٥٩٢٦ ر حيث انه صار
تقديم الكسر الاشاري الى سابع خانة وترك البواقي حسب الكسور بزيادة
ترقيم خانة ليكون الناتج من الحساب في غاية من التقريب
وحيث ان مساحة الدائرة مساوية لحاصل ضرب محيطها في ربع قطرها فينتج
من ذلك انه اذا كان نصف قطرها واحدا يكون نصف المحيط
= ٢١٤١٥٩٢٦ ر وان كان قطرها واحدا يكون المحيط
= ٢١٤١٥٩٢٦ ر قبين أن مقدار ط الذي هو النسبة التقريبية
بين محيط الدائرة وقطرها = ٢١٤١٥٩٢٦ ر وهو المطلوب

(امثلة)

* (امثلة) *

* (المثال الاول) *

أن يكون المطلوب ايجاد خط مستقيم يكافئ محيط دائرة قطرها معين
 فطريقة ذلك أن يقسم قطر الدائرة المعلومة الى سبعة أقسام متساوية ثم يرسم
 مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعد بقدر سبع القطر المعلوم ثم يكرر هذا البعد
 اثنتين وعشرين مرة فيحصل المطلوب بالجليل من التقريب

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب ايجاد مربع يكافئ دائرة معلومة
 فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى
 محيط الدائرة المعلومة والاخر يساوى ربع قطرها فالوسط المناسب
 المذكور يكون ضلع المربع المطلوب

أو يبحث عن الوسط المناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى نصف محيط
 الدائرة المعلومة والاخر يساوى نصف قطرها فالوسط المناسب الذى ينتج
 من هذه العملية يكون ضلع المربع المطلوب

أو يبحث عن الوسط المناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ربع محيط الدائرة
 المعلومة والاخر يساوى قطرها فالوسط المناسب الذى ينتج من هذه العملية
 يكون ضلع المربع المطلوب

* (المثال الثالث) *

أن يكون المطلوب ايجاد دائرة تكافئ مربع معلوما
 فطريقة ذلك أن يرسم بالحرف م ضلع المربع المعلوم وبالحرف د للدائرة
 المطلوبة وبالحرف س نصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$م = د = ط \quad ط \times \frac{٢}{٧} = تق \quad فننتج أن$$

$$تق = م : \frac{٢}{٧} = \frac{م \times ٧}{٢} = ٧ \times م \times \frac{٢}{٢٢} أي$$

$$٧ م : تق :: تق : \frac{٢}{٢٢}$$

ويعلم من هذه المناسبة أن نصف قطر الدائرة المطلوبه توسط متناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى سبعة أمثال ضلع المربع المعلوم والاخر يساوى جزءاً من اثنين وعشرين جزءاً من ضلع المربع المذكور
 * (المثال الرابع) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار محيط الدائرة التي قطرها خمس أذرع
 فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م للمحيط المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$م = ط \times ٥ = \frac{٢٢}{٧} \times ٥ = \frac{١١٠}{٧} = \frac{١٥}{٧} + ١٥$$
 أى ان المحيط المطلوب يساوى خمسة عشر ذراعاً وخمسة أسباع الذراع
 * (المثال الخامس) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار قطر الدائرة التي محيطها سبع وأربعون ذراعاً وسبع ذراع
 فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ن للقطر المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$\frac{١}{٧} + ٤٧ = ط \times ن = \frac{٢٢}{٧} \times ن$$
 ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$ن = \frac{(٤٧ + \frac{١}{٧}) \times ٧}{٢٢} = \frac{٣٢٧}{٢٢}$$
 أى ان القطر المطلوب يساوى خمسة عشر ذراعاً
 * (المثال السادس) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار مساحة الدائرة التي قطرها خمس أذرع
 فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ب لمساحة الدائرة المطلوبه فعلى منطوق
 المثال يكون

$$د = ط \times ن = \frac{٢}{٢} \times \frac{٢٢}{٧} = \frac{٢٢}{٧} \times ٥$$
 أو
$$د = \frac{١١}{١٢} \times ٢٥ = \frac{٢٧٥}{١٢} = \frac{٩}{١٢} + ١٩$$
 أى أن المساحة المطلوبه تساوى تسعة عشر ذراعاً وثماناً وتسعة أجزاء من أربعة عشر جزءاً من الذراع المربع
 * (المثال السابع) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار قطر الدائرة التي مساحتها تسعة وثلاثين ذراعاً مربعاً وهي الذراع المربع فطريقة ذلك أن يرمن بالحرف ν للقطر المطلوب وبالحرف τ لنصفه وبالحرف δ للمساحة المألومة فعلى منطوق المثال يكون

$$\begin{aligned} \delta = \tau \times \tau &= \tau \times \frac{\tau}{2} = \nu \times \frac{\tau}{2} = \left(\frac{\tau}{\nu} \div 2 \right) \times \tau \\ \nu \times \frac{\tau}{2} &= \delta \text{ أو } \nu \times \frac{1}{2} = \delta \text{ ومن هذه المعادلة ينتج أن} \\ \nu &= \delta : \frac{1}{2} = \frac{11}{2} = \frac{11}{1} = \frac{11}{1} \text{ وان} \\ \nu &= \frac{11}{1} \end{aligned}$$

و يعلم من ذلك أنه لا يجاد قطر الدائرة بعد معرفة مساحتها يلزم أن تضرب المساحة المألومة في أربعة عشر ويقسم حاصل الضرب على إحدى عشر ثم يؤخذ جذر الناتج فيكون المتحصل من الجذر مساوياً لمقدار القطر المطلوب

المثال الثامن

أن يكون المطلوب معرفة مقدار طول القوس الذي مقداره ٤٥ درجة و ٢٠ دقيقة بفرض أن نصف قطره ٤ و ٥ امتار فطريقة ذلك أن يبحث عن النسبة الكائنة بين هذا القوس وربيع المحيط ثم تضرب هذه النسبة في طول ربع المحيط فينتج المطلوب

وصورة العملية هكذا

$$\begin{aligned} 20 + 45 &= 65 \times 45 + 20 = 2925 + 20 = 2945 \\ 2945 &= 2720 \text{ وربع المحيط} = 65 \times 90 = 5850 \\ 5850 &: 2945 = 0.4 \end{aligned}$$

والنسبة الكائنة بين ٢٧٢٠ و ٥٨٥٠ = $\frac{2720}{5850} = \frac{78}{135}$ من ربيع المحيط وطول ربع المحيط = $\frac{\tau}{4} \times 4$ و ٥ فاذن يكون طول

القوس المطلوب هكذا

$$\text{سه} = \frac{28}{120} \times \frac{1}{4} \times 4 \text{ و } 0 = \frac{34}{120} \times \frac{1}{4} \times 4 \text{ و } 0$$

وصورة العملية بواسطة اللوغاريتم هكذا

$$\text{لوغا ٣٤} = ١,٥٣١٤٧٨٩ =$$

$$\text{لوغا ٤} = ١٠,٤٩٧١٤٩٩ =$$

$$\text{لوغا ٤ و } 0 = ٠,٧٣٢٣٩٣٨ =$$

$$\text{مكمل لوغا ١٢٥} = ٧,٨٦٩٦٦٦٢ =$$

$$\text{لوغا سه} = ٠,٦٣٠٦٨٨٩ =$$

$$\text{فيكون سه} = ٢٧٢٦ \text{ و } ٤ \text{ امتار}$$

والمتروك في هذا المقدار أقل من جزء من عشرة الاف من المتراى أقل من
عشر المليمتر

(المثال التاسع)

أن يكون المطلوب إيجاد مساحة قطع دائرة نصف قطرها اثناعشر مترا
وقوسه يساوى ٦٠ درجة فطريق ذلك ان يبحث عن طول هذا القوس
ثم يضرب الناتج في ربع القطر فينتج المطلوب

وصورة العملية هكذا

$$\text{القوس : ٢ ط تق} :: ٦٠ : ٣٦٠$$

$$\text{القوس} = \frac{٢ ط تق \times ٦٠}{٣٦٠} = \frac{ط تق}{٣} = \frac{١٢ \times ط}{٣} = ٤ ط$$

$$\text{والقطع} = ٤ ط \times ٦ = ٢٤ ط = ٢٤ \times ٢٩٦,٠ = ٧٥٠٠ \text{ مترا}$$

مربعاً وهو المطلوب

امثلة في جمع محيطات الدوائر وطرحها

المثال الاول

أن يكون المطلوب إيجاد محيط دائرة يساوى مجموع محيطين معلومين فطريقة
ذلك أن يرمن بالرمن ثم لاحد المحيطين المعلومين وبالرمن تقى لنصف قطره

وبالرمن

وبالرمز م' للمحيط الآخر وبالرمز نق' لنصف قطره وبالحرف م
للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

$$م = م' + م''$$
 وحيث ان $م = ٢ ط نق$ و $م' = ٢ ط نق'$ و $م'' = ٢ ط نق''$
 فينتج ان $نق = نق' + نق''$
 أعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي مجموع نصفي قطري المحيطين
 المعلومين

المثال الثاني

أن يكون المطلوب إيجاد محيط دائرة يساوي فاضل محيطين معلومين بطريقة
 ذلك ان يبحث عن فاضل نصفي قطري المحيطين المعلومين فينتج نصف قطر
 المحيط المطلوب

المثال الثالث

أن يكون المطلوب إيجاد محيط دائرة يساوي مجموع جـله محيطات معلومة
 بطريقة ذلك ان يبحث عن مستقيم يساوي مجموع انصاف اقطار المحيطات
 المعلومة فيكون هو نصف قطر المحيط المطلوب

المثال الرابع

أن يكون المطلوب إيجاد محيط دائرة يساوي الفاضل بين جـله محيطات
 معلومة وجـله محيطات كذلك فطريقة ذلك ان يبحث عن محيط يساوي جـله
 المحيطات الاول ثم يبحث عن محيط آخر يساوي جـله المحيطات الاخر ثم عن
 محيط يساوي فاضل هذين المحيطين فيكون هو المحيط المطلوب
 أمثلة في جمع الدوائر وطرحها

المثال الاول

أن يكون المطلوب إيجاد دائرة تساوي مجموع جـله دوائر معلومة بطريقة
 ذلك ان يرمز بالرمز د لاهدى الدوائر المعلومة وبالرمز نق لنصف

قطرها وبالرمز r للدائرة الثانية المعلومة كذلك وبالرمز r_2 لنصف قطرها وبالرمز r_3 للدائرة الثالثة وبالرمز r_4 لنصف قطرها وبالرمز r_5 للدائرة المطلوبة وبالرمز r_6 لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$$

وحيث ان

$$r = r_1 \text{ و } r = r_2 \text{ و } r = r_3 \text{ و } r = r_4 \text{ و } r = r_5 \text{ و } r = r_6$$

$$\text{يكون } r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$$

$$\text{فنتج ان } r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$$

أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوي مجموع مربعات انصاف اقطار الدوائر المعلومة

المثال الثاني

أن يكون المطلوب ايجاد دائرة تساوي فاضل دائرتين معلومتين فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز r للدائرة الكبرى وبالرمز r_1 لنصف قطرها وبالرمز r_2 للدائرة الصغرى وبالرمز r_3 لنصف قطرها وبالرمز r_4 للدائرة المطلوبة وبالرمز r_5 لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$r = r_1 - r_2 \text{ و } r = r_3 \text{ و } r = r_4$$

$$\text{و } r = r_5 \text{ يكون}$$

$$r = r_1 - r_2 + r_3 = r_4 + r_5$$

$$\text{فنتج ان } r = r_1 - r_2 + r_3$$

أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوي فاضل مربعي نصف قطري

الدائرتين

الدائرتين المعلومتين

المثال الثالث

أن يكون المطلوب إيجاد الفاضل بين جملة دوائر معلومة وجملة دوائر كذلك
فطريقة ذلك أن يبحث عن دائرة تساوى جملة الدوائر الاولى ثم يبحث أيضا
عن دائرة تساوى جملة الدوائر والاخر ثم دائرة تساوى فاضل هاتين
الدائرتين فتكون هي الدائرة المطلوبة

أمثلة في ضرب محيطات الدوائر وتقسيمها

المثال الاول

إذا علم محيط مثل م وكان المطلوب انشاء محيط ضعفه فطريقة ذلك أن
يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز م للمحيط المطلوب
وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون $م = ٢ \text{ ط نق}$
وحيث ان $م = ٢ \text{ ط نق}$ و $م = ٢ \text{ ط نق}$
يكون $٢ \text{ ط نق} = ٢ \times ٢ \text{ ط نق}$

ومن هذه المتساوية ينتج أن $٢ \text{ ط نق} = ٢ \text{ ط نق}$
أعنى أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوى ضعف نصف قطر المحيط المعلوم

المثال الثانى

إذا علم محيط مثل م وكان المطلوب انشاء محيط يكون ثلاثة أمثاله
فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز م
للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون
 $م = ٣ \text{ ط نق}$ وحيث ان $م = ٣ \text{ ط نق}$

و $م = ٣ \text{ ط نق}$ يكون $٣ \text{ ط نق} = ٣ \times ٣ \text{ ط نق}$
ومن هذه المتساوية ينتج أن $٣ \text{ ط نق} = ٣ \text{ ط نق}$

أعنى أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوى ثلاثة أمثال نصف قطر المحيط
المعلوم

المثال الثالث

إذا علم محيط مثل م وكان المطلوب إيجاد محيط آخر يساوي المحيط المعلوم
مضروباً في كمية معينة مثل د

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز م
للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون
 $\text{م} = \text{م} \times \text{د}$ وحيث أن $\text{د} = \frac{\text{ط}}{\text{نق}}$ و $\text{م} = \frac{\text{ط}}{\text{نق}}$ يكون
 $\text{د} = \frac{\text{ط}}{\text{نق}}$ $\text{ط} = \text{نق} \times \text{د}$

ومن هذه المساوية ينتج أن $\text{نق} = \text{نق} \times \text{د}$

أعني أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوي نصف قطر المحيط المعلوم مضروباً
في الكمية التي يراد ضرب المحيط المعلوم فيها

المثال الرابع

إذا علم محيط مثل م وكان المطلوب إيجاد محيط آخر يساوي المحيط المعلوم
مقسوماً على كمية معينة مثل د

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز م
للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون
 $\text{م} = \frac{\text{ط}}{\text{نق}}$ وحيث أن $\text{د} = \frac{\text{ط}}{\text{نق}}$ و $\text{م} = \frac{\text{ط}}{\text{نق}}$ يكون
 $\text{د} = \frac{\text{ط}}{\text{نق}}$ $\text{ط} = \frac{\text{نق}}{\text{د}}$ $\text{ط} = \frac{\text{نق}}{\text{د}} \times \text{د}$

ومن هذه المساوية ينتج أن $\frac{\text{ط}}{\text{د}} = \text{نق}$

أعني أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوي نصف قطر المحيط المعلوم مقسوماً
على الكمية التي يراد قسمة المحيط المعلوم عليها

المثال الخامس

أن يكون المطلوب إنشاء محيط نسبته إلى محيط معلوم كنسبة ٣ إلى ٥
فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز م للمحيط المعلوم وبالرمز نق لنصف قطره
وبالرمز م للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق

المثال

المثال يكون $م : م :: ٣ : ٥$
 وحيث ان $م : م :: نق : نق$
 يكون $نق : نق :: ٣ : ٥$
 ومن هذه المتناسبة ينتج أن $نق = نق \times \frac{٣}{٥}$
 أعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي ثلاثة أخماس نصف قطر المحيط
 المعلوم

امثلة في ضرب الدوائر وتقسيمها

المثال الاول

اذا علمت دائرة مثل $د$ وكان المطلوب ايجاد دائرة ضعفها فطريقة ذلك
 أن يرسم بالرمز $نق$ لنصف قطر الدائرة المعلومه وبالرمز $د$ للدائرة
 المطلوبة وبالرمز $نق$ لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون
 $د = ٢$ وحيث ان $د = ط نق$ و $د = ط نق$ يكون
 $ط نق = ٢$ ومن هذه المتساوية ينتج أن $نق = ٢$ نق
 أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة ضعف مربع نصف قطر الدائرة
 المعلومه

المثال الثاني

اذا علمت دائرة مثل $د$ وكان المطلوب ايجاد دائرة ثلاثة أمثالها
 فطريقة ذلك أن يرسم بالرمز $نق$ لنصف قطر الدائرة المعلومه وبالرمز $د$
 للدائرة المطلوبة وبالرمز $نق$ لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون
 $د = ٣$ وحيث ان $د = ط نق$ و $د = ط نق$ يكون
 يكون $ط نق = ٣$ ومن هذه المتساوية ينتج أن $نق = ٣$ نق
 أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة ثلاثة أمثال مربع نصف قطر

الدائرة المعلومة

المثال الثالث

إذا علمت دائرة مثل γ وكان المطلوب إيجاد دائرة أخرى تساوي الدائرة المعلومة مضروبة في كمية معينة مثل δ

فطريقة ذلك أن يرسم بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز δ للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فاعلى منطوق المثال يكون

$$\delta = \gamma \times \delta \quad \text{وحيث أن} \quad \delta = \text{ط نق} \quad \text{و} \quad \gamma = \text{ط نق}$$

يكون $\text{ط نق} = \text{ط نق} \times \delta$ ومن هذه المساوية ينتج أن

$$\text{نق} = \text{نق} \times \delta$$

أعني أن مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوي مربع نصف قطر الدائرة المعلومة مضروباً في الكمية التي يراد ضرب الدائرة المعلومة فيها

المثال الرابع

إذا علمت دائرة مثل γ وكان المطلوب إيجاد دائرة أخرى تساوي الدائرة المعلومة مقسومة على كمية معينة مثل δ

فطريقة ذلك أن يرسم بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز δ للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فاعلى منطوق المثال يكون

$$\delta = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{وحيث أن}$$

$$\gamma = \text{ط نق} \quad \text{و} \quad \delta = \text{ط نق} \quad \text{يكون}$$

$$\text{ط نق} = \frac{\text{ط نق}}{\delta} = \text{ط} \times \frac{\text{نق}}{\delta} \quad \text{ومن هذه المساوية ينتج أن}$$

$$\frac{\text{نق}}{\delta} = \text{نق}$$

أعني أن مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوي مربع نصف قطر الدائرة
المعلومة مقسوما على الكمية التي يراد تقسيم الدائرة المعلومة عليها

المثال الخامس

أن يكون المطلوب إنشاء دائرة نسبتها إلى دائرة معلومة كنسبة ٣ إلى ٥
فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف د للدائرة المعلومة وبالرمز نق لنصف
قطرها وبالرمز د للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فعلى
منطوق المثال يكون

$$د : د :: ٣ : ٥$$

وحيث أن

$$د : د :: نق : نق$$

يكون

$$نق : نق :: ٣ : ٥$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$نق = نق \times \frac{٣}{٥}$$

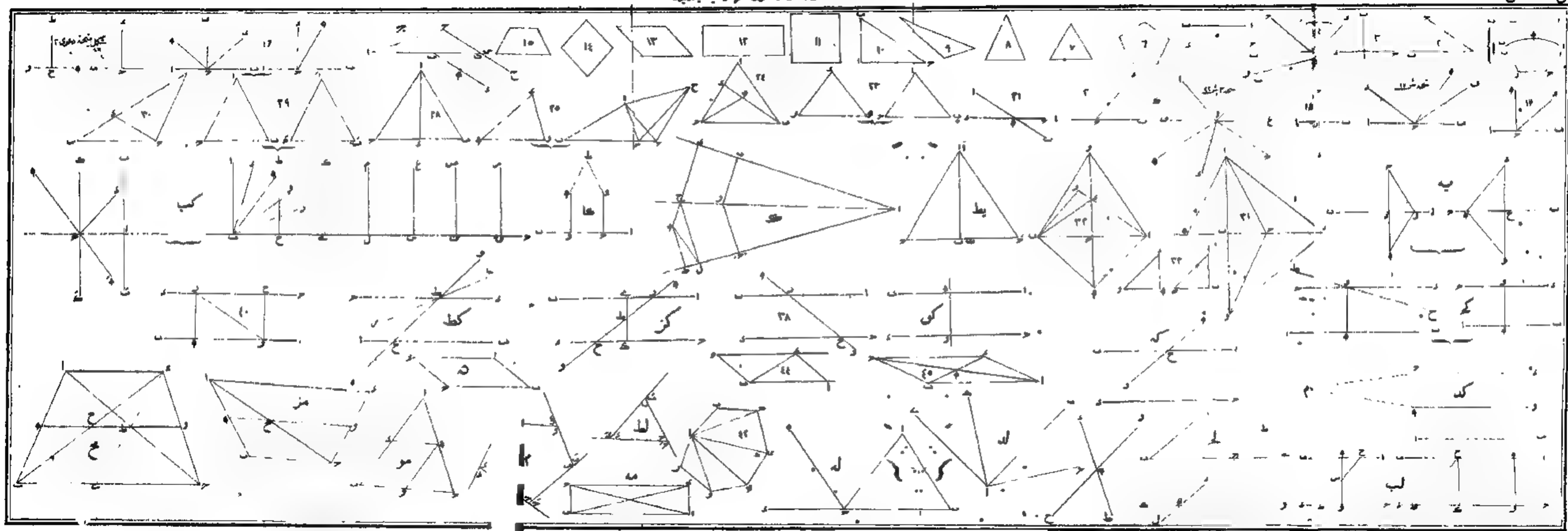
أعني أن مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوي ثلاثة أخماس مربع نصف
قطر الدائرة المعلومة

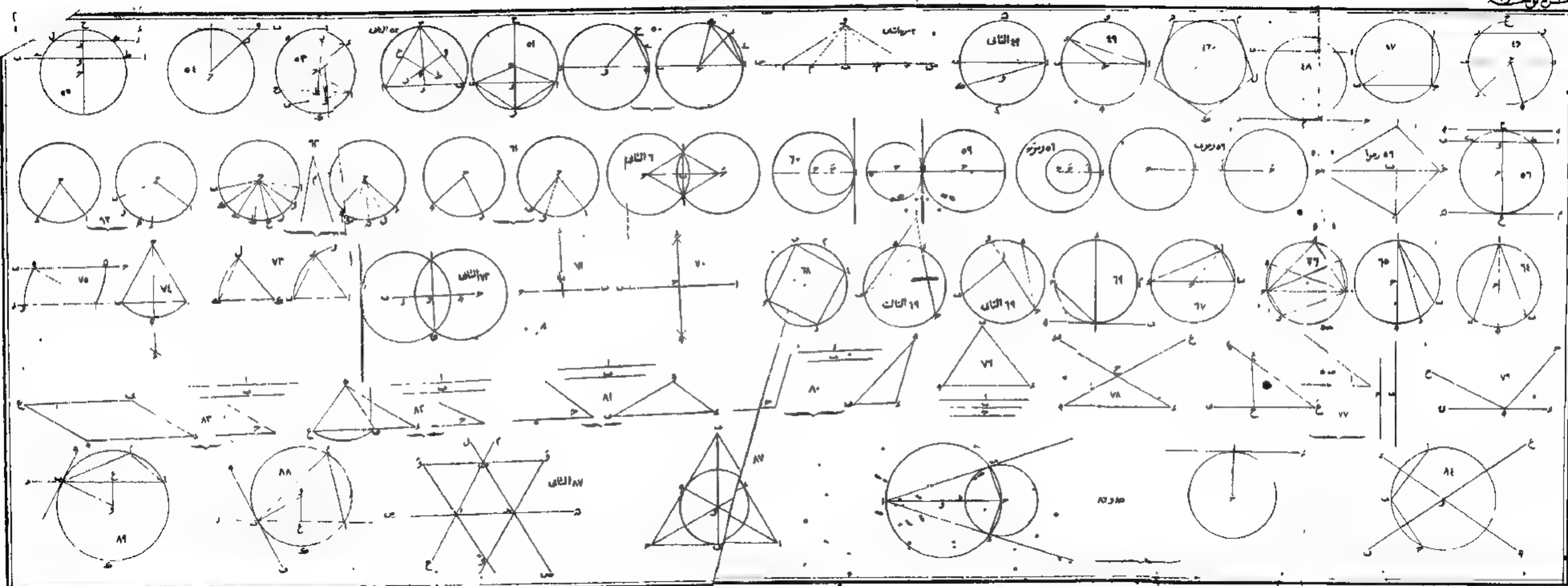
قد تم طبع الجزء الاول من النخبة العزبة في تهذيب الاصول الهندسية
 بدار الطباعة العامرة المنشأة ببولاق مصر القاهرة في ايام دولة
 صاحب الراى السيد حضرة أفندي ناولي النعم محمد السعيد
 ووافق تمام طبعه تحت ملاحظة ناظر المطبعة العامرة
 المذكورة ذات المنافع المشهورة حضرة على
 أفندي جرده باغها الله مأموله وقصده في واسط
 جمادة الاولى سنة ١٢٧٦ ألف ومائتين
 وست وسبعين من الهجرة النبوية
 على صاحبها أفضل
 الصلاة وأزكى
 التحية

بلغت تكاليف هذا الكتاب تسعة وعشرون غرشا وعشرة فضة لا غير

خالص الكرم

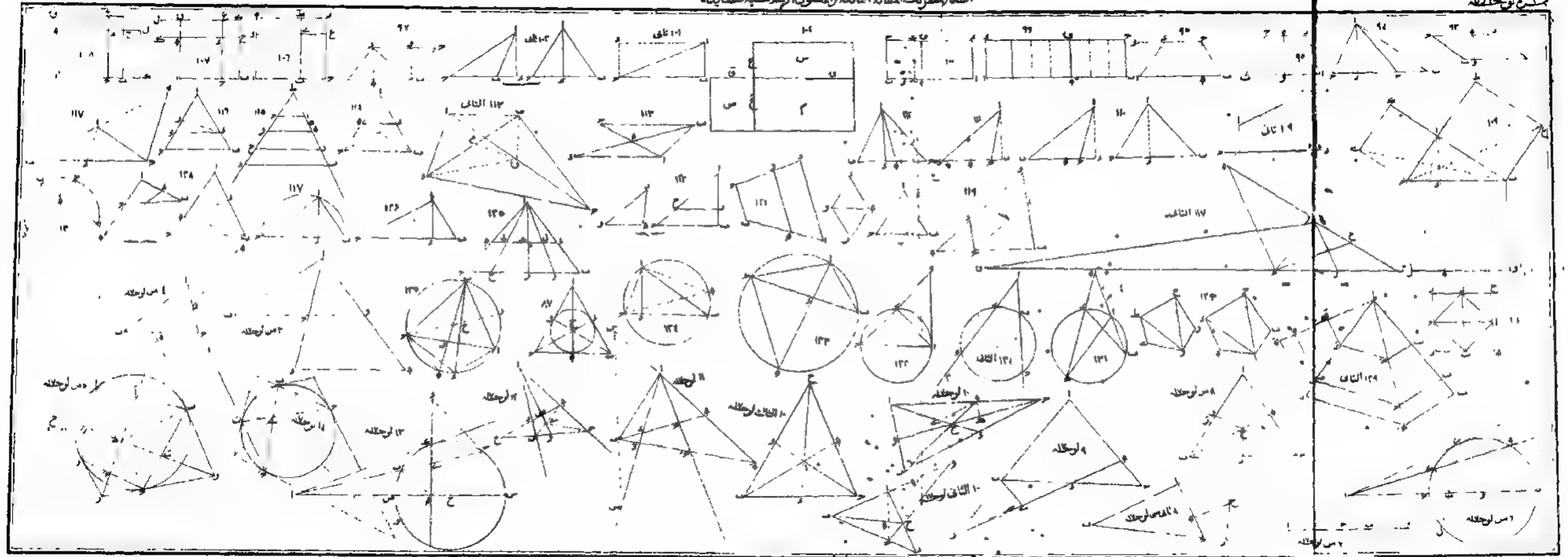
اشكال المقالة الاولى من اصول الهندسة الجديدة



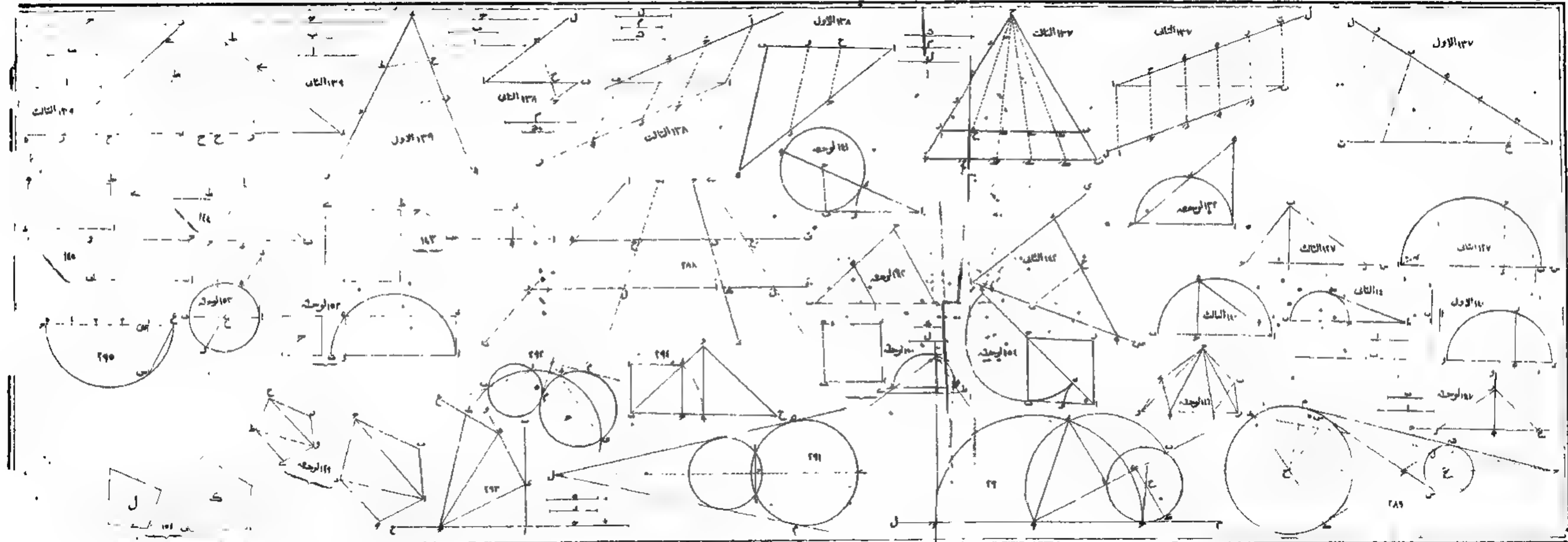


اشكال النظريات المقالة الثالثة من اصول الهندسة الجديدة

مكتبة لوجيستية



اشكال الدعاوى العملية المتعلقة بالمخاللة الثالثة من الاصول الخمسة للدين



شكال المفصلة الرابعة من الاصول الهندسية الجديدة

مع لوح ١٥٥

